SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

ANALIZA KONTAKTNOG PROBLEMA SA SMANJENJEM KONTAKTNE POVRŠINE

Doktorska disertacija

BRANIMIR RONČEVIĆ

Rijeka, 2012.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

ANALIZA KONTAKTNOG PROBLEMA SA SMANJENJEM KONTAKTNE POVRŠINE

Doktorska disertacija

BRANIMIR RONČEVIĆ

Mentor: Red. prof. dr. sc. Dubravka Siminiati

Rijeka, 2012.

SAŽETAK

U ovom je radu uz opis najvažnijih matematičkih formulacija i numeričkih pristupa korištenih u analizi kontaktnih problema, provedena analiza kontakta sa smanjenjem kontaktne površine. Analiza je provedena za dvije različite kategorije problema – za slučaj svornjaka, čahure i ploče uz pretpostavku nulte zračnosti te za slučaj utiskivača, sloja i podloge kada između sloja i podloge ne postoji čvrsta veza. Problem je primjenom metode konačnih elemenata istražen u okviru linearne teorije elastičnosti za slučaj ravninskog stanja deformacije. Numeričke analize provedene su upotrebom softvera Femap, koji koristi rješavač NX Nastran. Ispitani su utjecaj intenziteta vanjskog opterećenja te utjecaj geometrije i svojstava materijala. Pri razmatranju utjecaja materijala kao referentno rješenje uzet je slučaj u kojemu su elastična svojstva svih triju tijela identična, nakon čega su pojedinačno varirana elastična svojstva za svako od tijela. Na kraju je riješen i kontaktni problem uz razmatranje utjecaja trenja. Dobivene krivulje raspodjela kontaktnih pritisaka pokazuju jedinstveno ponašanje ovakve vrste kontaktnih problema, gdje se na kontaktnim površinama s većim zahvatnim kutom mogu javiti veći vršni pritisci. Takav rezultat može se činiti vrlo nekarakterističnim, ne samo u konvencionalnim slučajevima, već i kod problema sa smanjenjem kontaktne površine. Ovakva vrsta problema pokazuje se kao linearno zavisna o intenzitetu vanjskog opterećenja, uz zanemariv utjecaj opterećenja na promjene kontaktnih kutova. Problem utiskivača, sloja i podloge obrađen je primjenom iste metodologije te su i ovdje utvrđene zakonitosti utjecaja svojstava materijala i koeficijenta trenja. Pokazano je da kod ovakve vrste problema postoji nelinearna zavisnost kontaktnih pritisaka, ali i dimenzija kontaktnih površina, o vanjskom opterećenju. U eksperimentalnom je dijelu istraživanja primjenom optičke metode fotogrametrije na čeličnim modelima ispitano deformacijsko ponašanje sloja u problemu utiskivač-sloj-podloga. Primijenjena metoda zasnovana je na principu digitalne korelacije slike i upotrijebljen je mjerni sustav ARAMIS 4M. Rezultati mjerenja pokazuju zadovoljavajuće poklapanje s rezultatima numeričkih simulacija.

ABSTRACT

An overview of the most important formulations and numerical methods in the field of contact problem analysis is presented in this work, followed by an investigation of the behaviour of receding contact problems. The receding contact analysis was carried out for two different types of problems – the problem of a perfect-fit pin and bushing in a hole in a plate and the problem of an indenter pressing an unbonded layer resting on a substrate. The problems were analyzed using the finite element method within the scope of linear theory of elasticity and under the assumption of plane strain conditions. The numerical analyses were

carried out in the Femap software package, which uses the NX Nastran solver. Such contact problems were investigated for the influence of the intensity of external load, as well as the influence of different geometries and material properties. In the investigation of various materials a reference analysis was carried out for the case of material similarity between all the three bodies, after which material properties were varied in turn for each body. Finally the influence of friction was investigated as well. The obtained contact pressure distributions for the pin-bushing-plate problem show quite a unique behaviour, where higher peak values of contact pressures occur on contact surfaces with larger contact angles, which may seem very uncharacteristic not only for conventional contact problems, but for the class of receding contact problems as well. This class of problems shows to be linearly dependent on the intensity of external load, with negligible effect on the change of the contact angles. The problem of indenter, layer and substrate was investigated following the same methodology and the resulting influence of material dissimilarity and friction is systematically investigated here as well. This class of problems shows non-linear behaviour, where both the contact pressure distribution and contact half-width were found to be non-linearly dependable on the applied external load. Experimental investigation on steel models was carried out by optical measurements of displacements so as to ascertain the deformation behaviour of a layer indented into a substrate. The used method employs the digital image correlation technique and the ARAMIS 4M system was used in the experiment. The obtained measurement results show a satisfactory degree of agreement with the numerical results.

Predgovor

Većinu problema u kontaktnoj mehanici karakterizira povećavanje kontaktne površine s povećanjem vanjskog opterećenja i deformacijom tijela u zahvatu. Ovaj je rad bio motiviran svojevrsnom znanstvenom znatiželjom za obradom vrste problema koji odstupaju od ovog uobičajenog obrasca te ih u deformiranoj konfiguraciji tijela u zahvatu karakterizira smanjenje kontaktne površine. Takvo je ponašanje svojstveno primjerice slučaju svornjaka u ploči s nultom zračnošću te slučaju elastičnog sloja i podloge kada između njih ne postoji čvrsta veza. Premda prve znanstvene spoznaje o pojavi smanjenja kontaktne zone između elastičnog bloka i podloge sežu na sam početak 20. stoljeća i premda je problematika svornih i zatičnih spojeva bila predmet izuzetno velikog znanstvenog interesa od prve polovice 20. stoljeća naovamo, tematika kontakata sa smanjenjem kontaktne površine kao centralna ideja istraživanja ipak nije zadobila toliko veliku pozornost. S tim u vidu, doktorska je disertacija s naslovom *Analiza kontaktnog problema sa smanjenjem kontaktne površine* rezultat nastojanja da se ostvari doprinos u znanstvenim spoznajama vezanima uz ovu problematiku.

Ugodna mi je dužnost zahvaliti se svojoj mentorici red. prof. dr. sc. Dubravki Siminiati i red. prof. dr. sc. Borisu Obsiegeru na ukazanom povjerenju, pomoći i podršci te na korisnim savjetima u izradi ovog rada. Zahvaljujem se i red. prof. dr. sc. Marku Čanađiji na susretljivosti i pruženim odgovorima oko nedoumica koje su se javile pri uporabi softvera za numeričku analizu te osoblju knjižnice Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, prvenstveno Sanji Heberling Dragičević, na susretljivosti i ažurnosti prilikom nabave potrebne literature. Posebnu zahvalnost dugujem i prof. dr. sc. Janošu Kodvanju za ustupanje vremena i resursa Laboratorija za eksperimentalnu mehaniku pri Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu te nadasve doc. dr. sc. Anti Bakiću na svesrdnoj pomoći pri izradi eksperimenta te vrijednim sugestijama i odgovorima.

Za bezrezervnu se podršku zahvaljujem svojim roditeljima i svojoj djevojci Goranki, čije su mi ohrabrenje i potpora bili nezamjenjivi u svakoj prilici.

Autor

Sadržaj

1. UVOD ... 1

1.1. Značaj kontaktne mehanike ... 1

1.2. Vrste kontaktnih problema ... 3

1.2.1. Hertzov kontakt ... 5

1.2.2. Ne-Hertzov kontakt ... 7

1.3. Kontakt sa smanjenjem kontaktne površine ... 7

1.4. Rješenje kontaktnog problema ... 10

1.5. Cilj istraživanja i struktura disertacije ... 12

2. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA ... 15

2.1. Razvoj kontaktne mehanike ... 15

2.1.1. Pregled razvoja analitičkih metoda ... 15

2.1.2. Pregled razvoja numeričkih metoda ... 18

2.2. Pregled istraživanja kontakta sa smanjenjem kontaktne površine ... 20

2.2.1. Problem elastičnog sloja i podloge ... 20

2.2.2. Problem svornjaka u ploči ... 24

3. ANALITIČKA FORMULACIJA I NUMERIČKE METODE ... 27

3.1. Formulacija kontaktnih problema ... 27

3.1.1. Signorinijev problem i kontaktni uvjeti ... 27

3.1.2. Varijacijska formulacija ... 29

3.1.3. Pristupi u implementaciji kontaktnih uvjeta ... 36

3.2. Inkrementalno-iterativne procedure rješavanja ... 40

3.2.1. Temeljni koncept ... 40

3.2.2. Metode definiranja opterećenja ... 43

3.3. Metoda konačnih elemenata ... 44

3.3.1. Temeljna razmatranja ... 44

3.3.2. Osnovna jednadžba konačnog elementa i jednadžba sustava ... 44

3.3.3. Primjena MKE na kontaktne probleme ... 47

3.3.4. Softver Femap i modeliranje kontaktnog problema ... 48
3.4. Metoda rubnih elemenata ... 52
3.4.1. Osnovni matematički pojmovi ... 52
3.4.2. Postupak rješavanja problema elastomehanike primjenom MRE ... 54
3.4.3. Analitička formulacija MRE u linearnoj teoriji elastičnosti ... 56
3.4.4. Numerička implementacija ... 61
3.4.5. Primjena MRE na kontaktne probleme ... 63
4. REZULTATI NUMERIČKE ANALIZE ... 69
4.1. Problem svornjaka u ploči ... 69
4.1.1. Svornjak u provrtu opterećene ploče ... 69
4.1.2. Opterećeni svornjak u provrtu ploče ... 72
4.2. Svornjak u ploči s čahurom ... 73
4.2.1. Utjecaj intenziteta opterećenja i geometrije strukture ... 76
4.2.2. Utjecaj svojstava materijala ... 79
4.2.3. Kontaktni problem s trenjem ... 82
4.3. Problem utiskivača, sloja i podloge ... 86
4.3.1. Utjecaj intenziteta opterećenja i geometrije strukture ... 89
4.3.2. Utjecaj svojstava materijala ... 91
4.3.3. Kontaktni problem s trenjem ... 95
5. EKSPERIMENTALNI REZULTATI ... 99
5.1. Metoda fotogrametrijskog mjerenja ... 99
5.1.1. Osnovni pojmovi i princip rada ... 99
5.1.2. Digitalna korelacija slike ... 102
5.2. Opis eksperimentalnog sustava ... 106
5.2.1. Tehničke karakteristike ispitne opreme ... 106
5.2.2. Eksperimentalni model ... 107
5.3. Eksperiment i rezultati mjerenja ... 108
5.3.1. Priprema eksperimenta ... 108
5.3.2. Definiranje osnovnih parametara eksperimenta ... 109
5.3.3. Dobiveni rezultati i usporedba s MKE ... 111
6. ZAKLJUČAK ... 117
Popis literature ... 121
Popis oznaka i simbola ... 127
Popis slika ... 131
Popis tablica ... 136
Prilozi ... 137
Prilog A. Subdiferencijal nederivabilne funkcije ... 137
Prilog B. Betti-Maxwellov teorem ... 139
Prilog C. Rezultati analize svornjaka, čahure i ploče ... 140

Prilog C.1. Kontaktni pritisci za različite intenzitete opterećenja 140
Prilog C.2. Kontaktni pritisci za različita svojstva materijala 141
Prilog D. Rezultati analize utiskivača, sloja i podloge 144
Prilog D.1. Kontaktni pritisci za različite intenzitete opterećenja 144
Prilog D.2. Kontaktni pritisci za različita svojstva materijala 145
Životopis 149

Poglavlje 1

UVOD

1.1. Značaj kontaktne mehanike

Problemi vezani za mehaničke kontakte dvaju, a u općenitom slučaju i proizvoljnog broja deformabilnih tijela, od kraja 19. stoljeća do današnjih dana predmet su intenzivnog znanstvenog interesa i područje vrlo opsežnih i raznovrsnih znanstvenih istraživanja koje se može objediniti pod pojmom *kontaktne mehanike*. Osnovna motivacija u razvoju kontaktne mehanike sadržana je u potrebi što točnijeg poznavanja raspodjele kontaktnih pritisaka na rubovima tijela, odnosno na površini preko koje se ostvaruje kontakt i prenosi opterećenje, te polja naprezanja i deformacija uzrokovanih tim kontaktnim pritiscima unutar samih tijela koja se nalaze u zahvatu. Objektivna znanstvena potreba za zasebnim proučavanjem mehanike kontakta postala je široko prepoznata već 1882. godine s objavljivanjem vrlo značajnog rada njemačkog fizičara Heinricha Rudolfa Hertza, naslovljenog *Über die Berührung Fester Elastischer Körper* (prev. *O kontaktu elastičnih tijela*), a što se smatra začetkom kontaktne mehanike kao zasebne znanstvene discipline unutar okvira teorije elastičnosti.

Praktična važnost razvoja kontaktne mehanike proizlazi iz činjenice da kontaktna naprezanja, premda uglavnom vrlo lokalizirana po svom karakteru, mogu doseći vrlo visoke vrijednosti i, uzrokujući i pospješujući mikrooštećenja u materijalu, često mogu vrlo značajno doprinijeti smanjenju nosivosti, funkcionalnosti i trajnosti konstrukcijskih elemenata u eksploataciji. U svojem je epohalnom radu Hertz napisao sljedeće riječi [1]: "*Svoju pažnju možemo ograničiti samo na onaj dio tijela u kontaktu koji je vrlo blizu početnoj točki dodira, budući da su tu naprezanja iznimno velika u usporedbi s naprezanjima u ostatku tijela i posljedično tek u najmanjem iznosu ovise o silama koje djeluju na ostale dijelove tijela*."

Jedan od glavnih čimbenika pri stvaranju oštećenja u materijalu uslijed kontaktnih naprezanja jest pojava maksimalnog posmičnog naprezanja uglavnom neposredno ispod površine dodira [2,3]. Takvo je posmično naprezanje uzrokom pojave dislokacija u kristalnoj rešetki, a što dobro poznatim mehanizmima zamornoga loma često dovodi do pojave mikropukotina, koje svojim postupnim širenjem prema kontaktnoj površini na kraju uzrokuju makroskopska oštećenja u vidu odlamanja dijelova materijala. Takvo odlamanje materijala kao svoju posljedicu ima stvaranje jamica na površini tijela (eng. *pitting*), čime se ozbiljno narušavaju tribološka svojstva i nosivost konstrukcijskih elemenata. Kako naprezanja u zoni kontakta mogu biti velika, njihov intenzitet jednako tako u nemalom broju slučajeva može premašiti granicu elastičnosti i uzrokovati plastične deformacije u materijalu. Drugi oblici oštećenja koje se često susreće na mjestima međusobnog kontakta čvrstih tijela, naročito ukoliko postoji klizanje na kontaktnoj površini, jesu na primjer: (i) adhezijsko trošenje, kada se dijelovi materijala otkidaju uslijed odvajanja ili klizanja površina na kojima su prethodno kroz mehanizme snažnog međumolekularnog privlačenja i prianjanja hladnim zavarivanjem nastala spojišta između neravnina na površinama tijela u dodiru, (ii) žlijebljenje ili abrazija, gdje dolazi do prodiranja površinskih neravnina jednog tijela u materijal drugog tijela, prilikom čega dolazi do plastičnih deformacija na površini i urezivanja kanala. Općenito se ukupnost svih neželjenih pojava koje dovode do promjene oblika, dimenzija i kvalitete površina u kontaktu naziva *habanje*. Pritom je vrlo često nemoguće pouzdano ustvrditi koji je točno od svih poznatih mehanizama oštećenja površina prvenstveno odgovoran za pojavu habanja u nekom konkretnom slučaju [4].

Poznavanje raspodjele i intenziteta kontaktnih naprezanja i saznanja o naravi fizikalnih procesa koji sudjeluju u mehaničkom trošenju konstrukcijskih elemenata pružaju dragocjene spoznaje o njihovim eksploatacijskim ograničenjima. Nadalje, od jednako je velike praktične važnosti i koreliranje intenziteta dobivenih kontaktnih naprezanja sa sposobnošću predviđanja pojave i intenziteta spomenutih mehanizama oštećenja. U svojoj krajnjoj svrsi sve te spoznaje omogućavaju razvoj takvih konstrukcijskih rješenja koja će kroz izbor materijala, maziva, kvalitete obrade površina, toplinske obrade te dimenzija i oblika produljiti životni vijek i/ili optimizirati tribološka svojstva konstrukcijskih elemenata. Takvim se poboljšanim rješenjima postiže povećanje stupnja iskoristivosti u strojevima, ušteda energije, smanjenje buke, kao i veća razina sigurnost u njihovu radu. Kao prirodan nastavak znanstvene evolucije ljudske spoznaje i objektivnih potreba modernog industrijskog društva, u 20. su se stoljeću razvile dvije kontaktnoj mehanici srodne znanstvene discipline, a to su *tribologija* i *inženjerstvo površina*. Tribologija se može definirati kao znanost o relativnom gibanju površina u kontaktu i uz to vezanim pojavama trenja, trošenja i podmazivanja, a inženjerstvo površina je općenito govoreći disciplina koja se bavi primjenom metoda i postupaka za poboljšanje svojstava konstrukcijskog dijela kroz promjenu njegove površine.

U kontaktnoj su mehanici od vremena Hertzovih pionirskih radova pa do današnjih dana bili istraživani vrlo raznovrsni aspekti te problematike, kako primjenom analitičkih metoda, tako i provođenjem različitih vrsta eksperimentalnih ispitivanja, a naposljetku i primjenom kontinuirano razvijanih numeričkih metoda i modela. U posljednjih su se 30-ak godina istraživanja snažno intenzivirala prvenstveno zahvaljujući pojavi, razvoju i širokoj dostupnosti osobnih računala. To je bilo popraćeno intenzivnim razvojem i unaprjeđivanjem tada postojećih, ali i razvijanjem novih numeričkih algoritama te posljedično pojavom raznih komercijalnih računalnih paketa namijenjenih modeliranju i simuliranju problema strukturne mehanike. Usprkos navedenome, još uvijek postoji vrlo širok spektar problema u kontaktnoj mehanici koje tek treba riješiti, a smjerovi istraživanja kreću se u rasponu od primijenjene matematike i numeričke analize pa do fizike površina i razvoja suvremenih eksperimentalnih metoda. Unutar tog aktualnog mnoštva neriješenih problema postoji velik broj specifičnih kontaktnih problema koje se na najbolji način može riješiti izradom numeričkih modela ili izradom vlastitih računalnih programa.

1.2. Vrste kontaktnih problema

Za potpunije razumijevanje izlaganja u narednim poglavljima potrebno je pružiti kratak opis nekih karakterističnih vrsta problema u kontaktnoj mehanici. Postoji nekoliko osnovnih kategorija kontaktnih problema koji su u pojmovniku kontaktne mehanike i terminološki vrlo važni, a čijom se međusobnom kombinacijom može okarakterizirati svaki realni kontaktni problem.

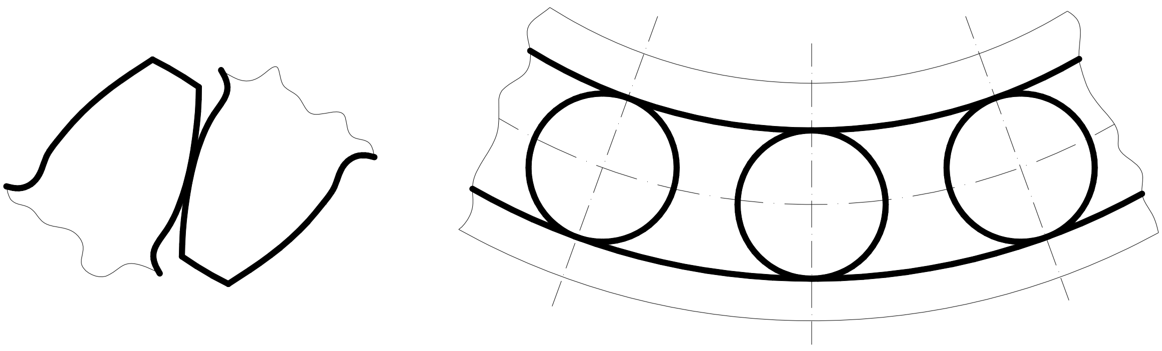
Nekonformni kontakt je kontakt pri kojemu se tijela u odsutnosti vanjskog opterećenja dodiruju samo u jednoj točki (npr. kontakt dviju kugli ili kugle i ravne plohe) ili duž linije (npr. kontakt dvaju valjaka s usporednim osima ili valjka i ravne plohe). Uvođenjem vanjskog opterećenja kontakt se uslijed deformacija počinje širiti na površinu koja okružuje točku ili liniju početnog kontakta, međutim dimenzije te površine u domeni elastičnih deformacija kod nekonformnog kontakta uvijek ostaju vrlo malene u usporedbi s dimenzijama samih tijela. Kontaktna površina kod ovakvih problema nije unaprijed poznata i ovisi o vrsti, smjeru i intenzitetu opterećenja te o svojstvima materijala. Kako su kontaktna naprezanja često vrlo velika u neposrednoj blizini zone kontakta, to se kontaktna naprezanja kod nekonformnog kontakta u svakom smislu može i treba smatrati određenom vrstom koncentracije naprezanja, a unutar promatranog ih se tijela uglavnom može razmatrati neovisno o drugim naprezanjima i neovisno o njegovu obliku te vrsti i prostornom rasporedu oslonaca.

Konformni kontakt ostvaruje se između tijela koja se i u odsutnosti vanjskog opterećenja dodiruju na površini koja je usporediva s dimenzijama tijela (npr. kontakt baze valjka položenog na ravnu plohu) ili koja će u opterećenom stanju uslijed deformacija stvoriti kontaktnu površinu dimenzija usporedivih s dimenzijama samih tijela (npr. vratilo u kliznom ležaju gdje postoji mala zračnost). Kontaktna će površina u prvom slučaju biti konstantna i unaprijed poznata, dok će u drugom slučaju, kao i kod nekonformnog kontakta, također ovisiti o parametrima opterećenja i karakteristikama materijala. Za drugi se slučaj u dijelu literature može ponekad naići i na pojam *skoro konformnog* kontakta. Za konformne je kontakte karakteristično da kontaktna naprezanja sa značajnim iznosom sudjeluju u općoj raspodjeli naprezanja u čitavom volumenu tijela i često ih se ne može razmatrati odvojeno.

Kontakt bez trenja idealizacija je stvarnih kontakata i može se smatrati dovoljno dobrom aproksimacijom samo u slučaju proučavanja kontakta vrlo glatkih i/ili dobro podmazanih površina koje slobodno mogu klizati jedna niz drugu, tj. bez otpora od ikakvog praktičnog značaja. Preko kontaktne se površine uslijed djelovanja vanjskog opterećenja s jednog tijela na drugo mogu prenositi samo normalne komponente kontaktnih pritisaka, a tangencijalne su sile u svakoj kontaktnoj točki uvijek jednake nuli.

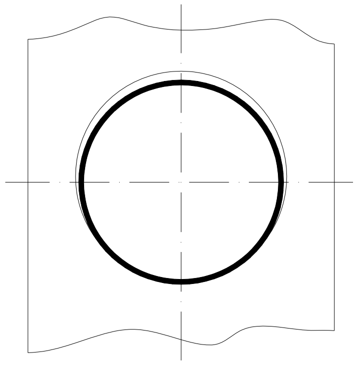
Kontakt s trenjem vrsta je kontakta do koje dolazi u svim realno postojećim kontaktnim problemima. Kod takvog je kontakta klizanje u točkama dodira suprotstavljeno silom trenja, što znači da je za pojavu međusobnog klizanja površina spomenutu silu trenja potrebno nadvladati silama koje djeluju na pravcu tangencijalnom na kontaktnu površinu. Sama sila trenja F_{T} u svakoj pojedinoj točki kontakta $\mathrm{A}(x_i)$ u svojem intenzitetu ovisi o svojstvima promatranih površina (hrapavost, prisutnost maziva i sl.), makroskopski objedinjenih u iznosu koeficijenta trenja μ, i o intenzitetu normalne komponente $p_{\mathrm{n}}(x_i)$ kontaktnog pritiska u toj istoj promatranoj točki. Takva se zavisnost uobičajeno izražava prema vrlo dobro poznatoj relaciji $F_{\mathrm{T}} = \mu\, p_{\mathrm{n}}(x_i)$. Stoga, ovisno o odnosu intenziteta tangencijalnih komponenti $p_{\mathrm{t}}(x_i)$ i normalnih komponenti kontaktnih pritisaka, a uz pretpostavku Coulombova zakona trenja, skupovi točaka na kontaktnoj površini mogu tvoriti zone u stanju prianjanja (eng. *stick*), u kojima su tangencijalne komponente manje od sile trenja, ili pak u stanju klizanja (eng. *slip*), kada je sila trenja nadvladana. Uzimanje trenja u obzir neizbježno matematički usložnjava problem i svaki model čini nelinearnim, međutim njegovim se zanemarivanjem u krajnji rezultat analize nerijetko uvodi značajna pogreška. Zanemarenje trenja s aspekta točnosti prihvatljivo je samo u slučajevima kada su zadovoljeni uvjeti spomenuti u prethodnom odlomku.

Kombiniranjem svojstava pripadnih nekonformnim ili konformnim kontaktima s pojavom ili izostankom trenja u grubim se crtama može okarakterizirati sve stvarne kontaktne probleme koje se susreće u praksi. Na slikama 1 i 2 prikazani su neki uobičajeni primjeri iz tehničke prakse koji pružaju zorniju predodžbu o karakterističnim konfiguracijama i odnosima tijela u zahvatu za nekonformne i konformne vrste kontakta.



a) *b)*

Sl. 1. Primjeri nekonformnih kontakata: a) zahvat zupčanika s vanjskim ozubljenjem, b) dodir valjaka/kuglica i valjnih staza u valjnom ležaju



Sl. 2. Primjer konformnog kontakta – vratilo u kliznom ležaju ili svornjak u ploči

Kada se u obzir uzima trenje, kvalitativan odnos rezultanti vanjskih opterećenja P_n i P_t s pojavom međusobnog klizanja površina vrlo se često izražava pomoću Coulombova zakona trenja, prema kojemu u svakoj točki na kontaktnoj površini vrijedi:

$$|p_\mathrm{t}(x_i)| = \mu |p_\mathrm{n}(x_i)|, \text{ za } P_\mathrm{t} \geq \mu P_\mathrm{n}, \tag{1.1.a}$$

$$|p_\mathrm{t}(x_i)| < \mu |p_\mathrm{n}(x_i)|, \text{ za } P_\mathrm{t} < \mu P_\mathrm{n}, \tag{1.1.b}$$

pri čemu tangencijalne komponente kontaktnih pritisaka $p_\mathrm{t}(x_i)$ na svakom tijelu imaju u svakoj točki kontakta smjer suprotan od smjera klizanja u toj točki ili barem smjera njegove tendencije, ukoliko do klizanja u promatranoj točki nije došlo.

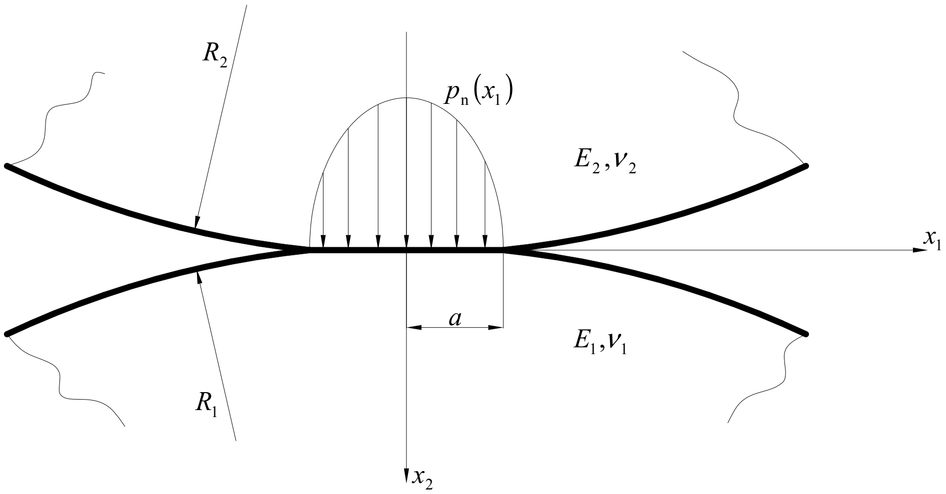
1.2.1. Hertzov kontakt

Hertzov kontakt ili Hertzov problem pojam je od izuzetnog značaja u kontaktnoj mehanici, prvenstveno stoga što se njime uz zadovoljavajući stupanj točnosti u praksi može aproksimirati velik broj realnih nekonformnih kontaktnih problema. Svaki Hertzov kontakt mora zadovoljavati sljedeće uvjete [1-3]:

- ✓ Površine tijela u kontaktu neprekidne su funkcije prostornih koordinata do uključno svoje druge derivacije.
- ✓ Profili kontaktnih površina tvore nekonforman kontakt – to implicira malu poluširinu *a* kontaktne površine (slika 3) u usporedbi s polumjerima zakrivljenosti tijela i s njihovim ukupnim dimenzijama.
- ✓ Pomaci i deformacije su mali, a tijela homogena i izotropna – time razmatranje problema uvijek ostaje unutar okvira linearne teorije elastičnosti, bez razmatranja materijalne ili geometrijske nelinearnosti.
- ✓ Naprezanja i deformacije u svakom se od dvaju tijela u kontaktu može razmatrati na način da se svako tijelo odvojeno promatra kao *elastični poluprostor* na kojeg djeluje rezultirajući kontaktni pritisak – ovakvo pojednostavljenje danog problema implicitno sadrži sve elemente prvih triju navedenih pretpostavki i u stvari

predstavlja analitičku implementaciju ranije spomenutog zanemarenja utjecaja oblika tijela i prostornog rasporeda njegovih oslonaca.

- ✓ Površine se smatraju idealno glatkima pa između njih nema trenja.



Sl. 3. Primjer Hertzova kontakta – dva valjka s paralelnim osima i karakteristična eliptična raspodjela kontaktnih pritisaka

Konkretna rješenja koje Hertzova teorija daje za osnovne veličine kao što su raspodjela kontaktnih pritisaka, maksimalni kontaktni pritisak, poluširina kontakta, intenziteti i položaji maksimalnih naprezanja, (...) mogu se svrstati u tri skupine, ovisno o tome da li se kontakt događa duž linije ili pak u okolini točke, pri čemu se iz točke može formirati ili kružna ili u općem slučaju eliptična kontaktna površina. Pritom je raspodjela kontaktnih pritisaka uvijek eliptična i na rubu kontaktne površine uvijek poprima nultu vrijednost.

Tako za dva valjka s polumjerima R_1 i R_2 i svojstvima materijala ν_1, E_1 i ν_2, E_2, koji su zbog paralelnosti svojih osi u kontaktu duž linije (kako je prikazano na slici 3) i koji su međusobno po jedinici duljine pritisnuti silom P_n, vrijede sljedeće osnovne relacije:

$$p_\mathrm{n}(x_1) = \frac{2P_\mathrm{n}}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x_1^2}\,, \tag{1.2}$$

$$a = \sqrt{\frac{4P_\mathrm{n}R}{\pi E^*}}\,, \tag{1.3}$$

pri čemu vrijedi

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,, \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\,. \tag{1.5}$$

Maksimalni se kontaktni pritisak $p_{n,max}$ i maksimalno posmično naprezanje τ_{max} javljaju na osi x_2, koja prolazi tjemenom elipse određene izrazom (1.2), i iznose

$$p_{n\,max} = \sqrt{\frac{P_n E^*}{\pi R}}\ ;\ \tau_{max} = 0{,}3\, p_{n\,max}\,, \tag{1.6}$$

pri čemu se τ_{max} javlja na dubini $x_2 = 0{,}78a$.

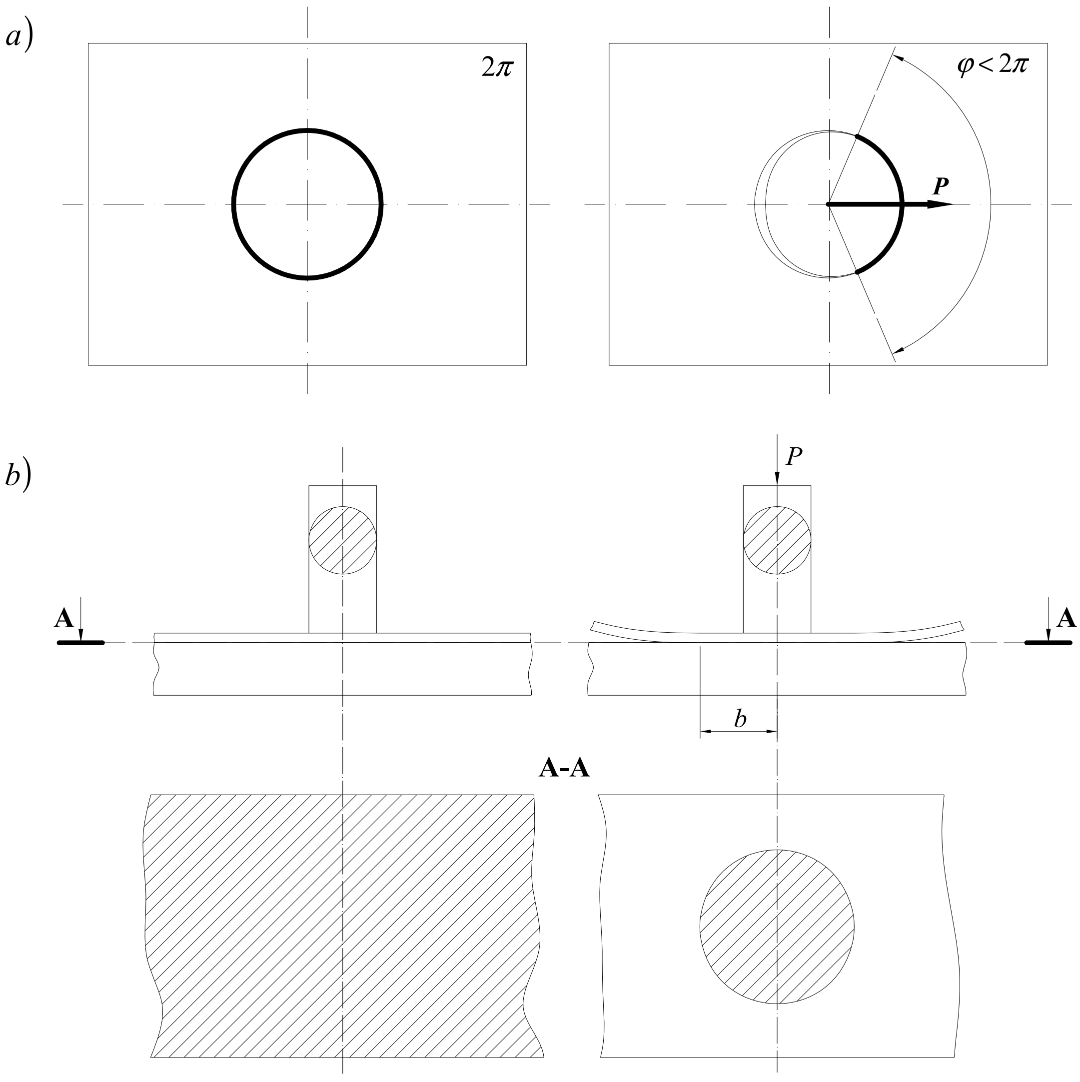
1.2.2. Ne-Hertzov kontakt

U skupinu ne-Hertzovih kontakata spadaju svi oni slučajevi koji ne zadovoljavaju barem jednu od pretpostavki navedenih u poglavlju 1.2.1. U tu se skupinu ubrajaju, na primjer, sve vrste konformnih kontakata, kontakti s (nezanemarivim) trenjem, elastoplastični kontakti, višestruki elastični nekonformni kontakti (npr. valjna tijela u valjnim ležajevima), kontakti koji mogu uključivati velike pomake (npr. kod nemetalnih materijala) itd. Rješavanje takvih problema uz pretpostavke Hertzove teorije gotovo uvijek dovodi do nezadovoljavajuće točnosti rezultata. Slijedom rečenoga, može se doći do zaključka kako svaki realni kontaktni problem spada u klasu ne-Hertzovih problema te kako Hertzova formulacija uvijek i bez iznimke predstavlja samo aproksimaciju stvarnih uvjeta koji vladaju u zoni realnih kontakata. Drugim riječima, kontaktni problem spada u klasu ne-Hertzovih kontakata iz potpuno praktičnog razloga nezadovoljavajuće točnosti rezultata koju za njegov opis pruža Hertzova teorija, a ne zato jer nasuprot njemu postoje kontaktni problemi koje Hertzova teorija opisuje s apsolutnom točnošću.

Kao klasu ne-Hertzovih kontakata od osobitog značaja za ovaj rad potrebno je izdvojiti konformne kontakte, kod kojih uglavnom ne postoji mogućnost iznalaženja analitičkih rješenja za raspodjelu kontaktnih pritisaka [1,2]. Razloge za ovo treba tražiti u činjenici da kontaktna površina prenosi opterećenja koja mogu imati velik utjecaj na stanje naprezanja u značajnom dijelu volumena tijela, a što eliminira mogućnost rješavanja problema kroz pretpostavku o elastičnom poluprostoru. Nadalje, kontaktne plohe u takvom slučaju najčešće nisu neprekidne funkcije prostornih koordinata, već na rubovima postoji diskontinuitet koji dovodi do numeričkih singularnosti, a što proizvodi beskonačne vrijednosti kontaktnih pritisaka koje problem čine analitički nerješivim.

1.3. Kontakt sa smanjenjem kontaktne površine

U većini je kontaktnih problema odnos između vanjskog opterećenja i kontaktne površine takav da se kontaktna površina povećava s povećanjem intenziteta opterećenja. Postoje, međutim, u skupini konformnih kontakata slučajevi kod kojih je kontaktna površina najveća u neopterećenom stanju, a s povećanjem intenziteta opterećenja uslijed deformacija dolazi do smanjenja kontaktne površine. Ta je pojava u engleskoj literaturi poznata pod nazivom *receding contact*, a što znači da se doslovnim prenošenjem značenja može prevesti kao *kontakt sa smanjenjem kontaktne površine*. Uobičajeni slučajevi kod kojih dolazi do takve vrste kontakta jesu slučaj svornjaka smještenog u ploči, na primjer kada između svornjaka i provrta ne postoji zračnost, te slučaj elastičnog sloja pritisnutog u podlogu (koristi se i termin *supstrat*). Iz slike 4 vidljivo je da će kontaktna površina (kontaktni kut φ ili poluširina kontakta b) u oba navedena slučaja u deformiranoj konfiguraciji biti u potpunosti sadržana unutar početne površine kontakta koja odgovara neopterećenom i nedeformiranom stanju promatranih tijela.



Sl. 4. Slučaj smanjenja kontaktne površine za: a) svornjak u ploči, b) elastični sloj pritisnut u podlogu

Važnost što točnijeg modeliranja problema ekvivalentnih problemu svornjaka u ploči očituje se prvenstveno u raširenoj uporabi rastavljivih spojeva u strojarstvu i potrebi vjerodostojnog predviđanja ponašanja takvih spojeva u najrazličitijim režimima rada i opterećenja. To proizlazi iz činjenice da mjesta takvih spojeva u složenim strojarskim konstrukcijama vrlo često predstavljaju kritične točke najpodložnije gubitku funkcije uslijed loma, pojave plastične deformacije, habanja ili bilo kojeg drugog uzročnika gubitka funkcije. Nadalje, spomenuti je problem ekvivalentan i slučaju kontakta različitih vrsta izduženih tijela ovalnog profila smještenih u provrtu u matrici, a što je tematika koja ima važnost u analizi ponašanja raznih vlaknima ojačanih kompozitnih materijala i struktura, kod kojih može doći do razdvajanja vlakana i matrice, osobito uslijed izloženosti zamornim opterećenjima.

S druge strane, proučavanje problema kontakta jednog ili većeg broja elastičnih slojeva s podlogom (supstratom) imaju važnost zbog vrlo raširene uporabe tankih slojeva (prevlaka), čija je prvenstvena namjena poboljšanje triboloških svojstava tehnički bitnih površina raznih strojnih elemenata, dijelova raznih uređaja i sl. Izučavanje interakcije jednog ili više elastičnih slojeva u kontaktu s podlogom svoju veliku važnost također duguje i potrebi što točnijeg modeliranja prijenosa opterećenja na elastično temeljenje strojeva, kao i raznih većih struktura važnih u drugim poljima tehničkih znanosti. Taj aspekt ovu problematiku čini vrlo aktualnom ne samo u strojarstvu, već u jednakoj mjeri i na polju građevine i geotehnike.

Slučaj kontakta sa smanjenjem kontaktne površine (kao što je prikazano na slici 4.b) javit će se kada između sloja/slojeva i podloge ne postoji čvrsta veza koja bi spriječila njihovo slobodno razdvajanje u slučaju izostanka međusobno tlačnih sila, što podrazumijeva da na površini razdvajanja dvaju materijala ne mogu postojati vlačna naprezanja. Nasuprot tome, u slučaju kada između sloja i podloge postoji veza koja sprječava njihovo slobodno razdvajanje, u točkama koje se nalaze u ravnini razdvajanja dvaju materijala moguća je i pojava vlačnih naprezanja.[1] Slijedom rečenoga, kada se ne radi o kontaktu sa smanjenjem kontaktne površine, tada je površina kontakta u ovakvom problemu uvijek unaprijed poznata, dok je problem kontakta sa smanjenjem kontaktne površine značajno složeniji jer je kontaktna površina nepoznata. Za probleme elastičnih slojeva i deformirane su konfiguracije, prema tome, značajno drugačije u ovisnosti o tome da li do smanjenja kontaktne površine dolazi ili ne dolazi.

Nasuprot tome, kod kontaktnih problema cilindričnih tijela (svornjaka) smještenih u provrtu (kao što je prikazano na slici 4.a) u slučaju kada je intenzitet vanjskog opterećenja dovoljno velik gubi se svaka značajna razlika u poljima naprezanja i deformacija između slučaja kada smanjenje kontaktne površine postoji i kada ne postoji[2]. U takvom slučaju niti konačna deformirana konfiguracija ne ovisi o tom geometrijskom odnosu tijela, već je u kvalitativnom smislu uvijek identična. Iz tog je razloga rezultate i razvijene modele dobivene analizama ovakve vrste problema moguće u određenom opsegu analogijom primijeniti i na

[1] Da li je naprezanje vlačno ili tlačno promatra se dakako iz odvojene perspektive svakog napregnutog tijela zasebno, a neovisno o smjeru koordinatnih osi bilo kojeg koordinatnog sustava, koji uvijek može biti izabran proizvoljno.

[2] Smanjenje kontaktne površine javit će se u slučaju kada između svornjaka i provrta postoji preklop (čvrsti dosjed) ili idealno poklapanje profila (nulta zračnost). Kada između svornjaka i provrta postoji zračnost, tada s povećanjem opterećenja raste i kontaktna površina, s obzirom da se početni kontakt u neopterećenom stanju ostvaruje samo duž linije.

nemali broj drugih slučajeva kontaktnih problema koji ne spadaju doduše u klasu kontakata sa smanjenjem kontaktne površine, ali kod kojih se javljaju konformni kontakti cilindričnih površina. Tako se kontakt analogan kontaktu cilindričnog tijela s provrtom javlja i u nekim drugim karakterističnim primjerima strojarskih konstrukcija, kao na primjer kod zupčastih prijenosa s geometrijom Wildhaber–Novikova ozubljenja[3], u kojemu se javlja zahvat konkavnih s konveksnim površinama zubi pa je takav kontakt, prema tome, po svojoj prirodi konforman.

1.4. Rješenje kontaktnog problema

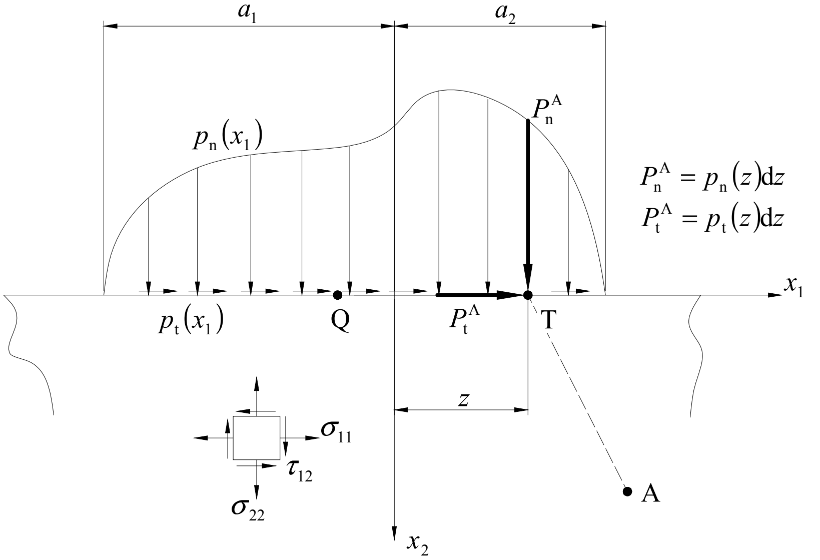
Neovisno o tome kako se određeni kontaktni problem može klasificirati, a što ovisi o geometriji tijela i raznim drugim čimbenicima (npr. svojstva materijala, prisutnost maziva, vrsta i način opterećenja, ...), kao i o tome da li je problem analitički rješiv, temeljna se zadaća pri rješavanju svakog kontaktnog problema sastoji u iznalaženju načina da se na temelju poznatih geometrija i vanjskih sila odredi:

- ✓ kontaktna površina (oblik i dimenzije),
- ✓ raspodjele normalnih i tangencijalnih kontaktnih opterećenja,
- ✓ kontaktno stanje – prianjanje ili klizanje,
- ✓ naprezanja i pomaci/deformacije u svim točkama tijela.

Svako rješenje kontaktnog problema, koje mora zadovoljavati zadane rubne uvjete (na primjer poznate ili pretpostavljene raspodjele kontaktnih pritisaka na površinama tijela), daje sve komponente naprezanja i deformacija u svim točkama na rubovima tijela i unutar njih. Raspodjela kontaktnih pritisaka nad diferencijalnom površinom u okolici proizvoljne točke T kontaktne površine predstavlja u stvari koncentriranu silu koja u točki T djeluje na tijelo. Svaka takva sila u proizvoljnoj točki A unutar promatranoga tijela svojim djelovanjem doprinosi ukupnom stanju naprezanja i deformacije. Komponente naprezanja i deformacije u svakoj proizvoljno odabranoj točki u svojim ukupnim intenzitetima i predznacima uvijek ovise o intenzitetima i pravcima djelovanja svih kontaktnih sila i o položajima svih točaka u kojima te sile djeluju. Primjer ravninskog stanja deformacije elastičnog poluprostora vrlo dobro ilustrira opisani koncept. Problem je prikazan na slici 5, a kontaktna su opterećenja $p_n(x_1)$ i $p_t(x_1)$, odnosno koncentrirane sile P_n i P_t, za ovakav ravninski problem uvijek izražena po jedinici duljine u koordinatnom smjeru okomitom na promatranu ravninu – u ovom slučaju to će biti u smjeru osi x_3.

---

[3] Wildhaber–Novikovo ozubljenje ima cilindrični profil zubi, pri čemu profil jednog zupčanika ima približno oblik negativa drugog zupčanika. Takvi se zupčasti prijenosi odlikuju vrlo velikom nosivošću u odnosu na konvencionalna evolventna ozubljenja, uz istovremeno veću otpornost na habanje i manje gubitke trenja.



Sl. 5. Komponente naprezanja za slučaj ravninskog stanja deformacije za poznatu raspodjelu normalnih i tangencijalnih kontaktnih opterećenja na elastičnom poluprostoru

Integriranjem po čitavoj širini $[-a_1, a_2]$ kontaktne površine za slučaj prikazan na slici 5 može se pokazati da za komponente naprezanja u svakoj točki A(x_1, x_2) poluprostora vrijede sljedeći izrazi [1]:

$$\sigma_{11} = -\frac{2x_2}{\pi}\int_{-a_1}^{a_2}\frac{p_n(z)(x_1-z)^2\,dz}{\left[(x_1-z)^2+x_2^2\right]^2} - \frac{2}{\pi}\int_{-a_1}^{a_2}\frac{p_t(z)(x_1-z)^3\,dz}{\left[(x_1-z)^2+x_2^2\right]^2}, \tag{1.7}$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2x_2^3}{\pi}\int_{-a_1}^{a_2}\frac{p_n(z)\,dz}{\left[(x_1-z)^2+x_2^2\right]^2} - \frac{2x_2^2}{\pi}\int_{-a_1}^{a_2}\frac{p_t(z)(x_1-z)^3\,dz}{\left[(x_1-z)^2+x_2^2\right]^2}, \tag{1.8}$$

$$\sigma_{12} = \tau = -\frac{2x_2^2}{\pi}\int_{-a_1}^{a_2}\frac{p_n(z)(x_1-z)\,dz}{\left[(x_1-z)^2+x_2^2\right]^2} - \frac{2z}{\pi}\int_{-a_1}^{a_2}\frac{p_t(z)(x_1-z)^2\,dz}{\left[(x_1-z)^2+x_2^2\right]^2}. \tag{1.9}$$

Elastični se pomaci $\bar{u}_1(x_1)$ i $\bar{u}_2(x_1)$ na površini u proizvoljnoj točki Q(x_1,0) dobivaju analognim postupkom integriranja pomaka uslijed utjecaja normalnih i tangencijalnih sila koje djeluju u svim točkama kontaktne površine [1]:

$$\bar{u}_1 = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E}\left(\int_{-a_1}^{x_1} p_n(z)\,dz - \int_{x_1}^{a_2} p_n(z)\,dz\right) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\int_{-a_1}^{a_2} p_t(z)\ln|x_1-z|\,dz + K_1, \tag{1.10}$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\int_{-a_1}^{a_2} p_n(z)\ln|x_1-z|\,dz + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E}\left(\int_{-a_1}^{x_1} p_t(z)\,dz - \int_{x_1}^{a_2} p_t(z)\,dz\right) + K_2, \tag{1.11}$$

a derivacijom (1.10) i (1.11) po x_1, u svrhu eliminacije konstanti integracije K_1 i K_2, konačno se dobiva:

$$\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_1} = \overline{\varepsilon}_{11} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} p_\mathrm{n}(x_1) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a_1}^{a_2} \frac{p_\mathrm{t}(z)}{x_1 - z} \mathrm{d}z \,, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_1} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a_1}^{a_2} \frac{p_\mathrm{n}(z)}{x_1 - z} \mathrm{d}z + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} p_\mathrm{t}(x_1). \tag{1.13}$$

Općenito govoreći, za rješenje svakog kontaktnog problema potrebno je kao rubne uvjete poznavati dvije od četiriju funkcija $p_\mathrm{n}(x_1)$, $p_\mathrm{t}(x_1)$, $\overline{u}_1(x_1)$ i $\overline{u}_2(x_1)$, s obzirom da je na taj način problem jednoznačno definiran. U ovisnosti o kombinaciji poznatih veličina na površini, rubni se uvjeti mogu svrstati u jednu od četiri klase [1]: (I) poznate su raspodjele kontaktnih opterećenja $p_\mathrm{n}(x_1)$ i $p_\mathrm{t}(x_1)$, (II) poznato je $\overline{u}_1(x_1)$ i $p_\mathrm{n}(x_1)$ ili $\overline{u}_1(x_1)$ i $p_\mathrm{t}(x_1)$, (III) poznato je $\overline{u}_1(x_1)$ i $\overline{u}_2(x_1)$, (IV) poznato je $\overline{u}_2(x_1)$ uz vezu kontaktnih opterećenja relacijom $p_\mathrm{t}(x_1) = \mu p_\mathrm{n}(x_1)$.

Temeljni izvor složenosti u rješavanju svih vrsta kontaktnih problema leži u velikoj fizikalnoj međuovisnosti osnovnih veličina. Pomak je u svakoj točki površine određen ukupnom raspodjelom kontaktnih pritisaka, koji istovremeno jednako tako ovise i o ukupnoj raspodjeli pomaka svih točaka na površini. Takva fizikalno i matematički složena i nelinearna narav kontaktnih problema proizvodi vrlo velika ograničenja u dosegu analitičkih metoda rješavanja, ali jednako tako i numeričke algoritme čini značajno složenijima u usporedbi s konvencionalnim problemima strukturne mehanike. S obzirom da kontaktna površina u većini slučajeva nije poznata unaprijed, prilikom implementacije numeričkog modela potrebno je koristiti iterativne algoritme, odnosno inkrementalno-iterativne algoritme ukoliko se u obzir uzima i trenje [2,5].

1.5. Cilj istraživanja i struktura disertacije

Temeljni je cilj istraživanja u ovom radu provedba analize kontaktnog problema sa smanjenjem kontaktne površine kroz izradu numeričkih modela kontakta temeljenih na metodi konačnih elemenata. Cilj je prvog dijela istraživanja pružiti dobar opis metoda numeričkog modeliranja kontaktnog problema te zatim izraditi prikladne numeričke modele u svrhu rješavanja problema svornjaka u ploči i sloja na podlozi pritisnutog utiskivačem. Vodeća ideja koja je motivirala ovaj rad je izrada modela kontakta svornjak-čahura-ploča te modela podloga-sloj-utiskivač u kojima se sva tri tijela smatraju elastičnima i u kojima je na svim kontaktnim površinama prisutno trenje. Problem smanjenja kontaktne površine za problem sa svornjakom i čahurom nije, prema autorovim saznanjima, zadobio pozornost u literaturi, dok u slučaju sloja i podloge takva razina složenosti numeričkog modela osigurava bolji stupanj aproksimacije stvarnog kontaktnog problema u odnosu na do sada objavljivane rezultate. Dobiveni rezultati bit će stavljeni u kontekst rezultata objavljenih u literaturi te će se u tom svjetlu, kao nadogradnja dosadašnjih spoznaja o ovoj problematici, definirati i centralne ideje znanstvenog doprinosa ovoga rada.

Verifikacija izrađenih numeričkih modela i dobivenih rezultata je dvojaka – kroz usporedbu odgovarajućih rješenja s odabranim rezultatima objavljenima u dostupnoj literaturi za problem svornjaka u ploči te kroz usporedbu rezultata numeričke simulacije s rezultatima dobivenima fotogrametrijskim snimanjem eksperimentalnog modela utiskivača, sloja i podloge. Disertacija je, uključivo s dosadašnjim osnovnim razmatranjima uvodnog poglavlja, strukturirana u šest poglavlja:

Poglavlje 2 u svom prvom dijelu sadrži sažet pregled dosadašnjih istraživanja na polju kontaktne mehanike općenito, dajući kratak opis njenog povijesnog razvoja, pri čemu je naglasak stavljen na primjenjivane metode rješavanja i modeliranja kontaktnih problema. U drugom je dijelu iznesen pregled istraživanja i osnovnih znanstvenih spoznaja povezanih s problemima kontakta sa smanjenjem kontaktne površine, i to odvojeno za problem elastičnog sloja i zatim za problem svornjaka u ploči.

Poglavlje 3 započinje opisom osnovnih teorijskih postavki analitičke formulacije kontaktnih problema u vidu varijacijskih nejednakosti i jednakosti te osnovnih koncepata implementacije kontaktnih uvjeta. Nakon toga izložen je sažet opis formulacije i implementacije metode konačnih elemenata (MKE) i metode rubnih elemenata (MRE), uz opis koncepta njihove primjene u analizi kontaktnih problema. U sklopu opisa MKE izložen je i opis metode definiranja i primjene tzv. *slide line* elemenata te njegove formulacije i numeričke implementacije u softverskom paketu Femap v10.0, koji je korišten u istraživanju i koji se temelji na metodi konačnih elemenata.

Poglavlje 4 sadrži opis rezultata numeričkih analiza. U svrhu preliminarne verifikacije pouzdanosti numeričkih modela, riješen je problem elastičnog svornjaka u elastičnoj ploči, i to za slučaj vlačnog opterećenja ploče i zaatim za slučaj opterećenja svornjaka koncentriranom silom. Potom je modeliran složeniji problem svornjaka i čahure smještenih u vlačno opterećenu ploču, pri čemu su ispitani utjecaji geometrije modela (različite debljine čahure), intenziteta opterećenja, različitih kombinacija elastičnih konstantni materijala te naposljetku Coulombova trenja na kontaktnim površinama. Nakon toga analiziran je model elastičnog sloja kojeg u elastičnu podlogu pritišće elastični utiskivač cilindričnog profila te je i za ovaj problem provedena analiza analogna razmatranjima za slučaj svornjaka i čahure. Promjena geometrije za problem utiskivača, sloja i podloge izvedena je isključivo variranjem polumjera cilindričnog utiskivača.

Poglavlje 5 obuhvaća eksperimentalni dio istraživanja provedenih u ovom radu. Prvi dio poglavlja sadrži izlaganja o osnovnim pojmovima i principima fotogrametrije te teorijskim i matematičkim osnovama na kojima se metoda temelji. U nastavku je opisana korištena ispitna oprema, eksperimentalni model na kojemu su se radila mjerenja, ustroj i konfiguracija eksperimentalnog sustava te svi važniji parametri eksperimenta. Na kraju poglavlja izloženi su rezultati provedenih mjerenja i uspoređeni su s rezultatima numeričkih simulacija, čime je također izvršena verifikacija napravljenih numeričkih modela.

Poglavlje 6 zaključno je poglavlje u kojemu se iznosi sažet pregled dobivenih rezultata i stečenih znanstvenih spoznaja, uz kritičku analizu provedenog istraživanja i dobivenih rezultata u kontekstu potencijalnih smjerova budućih istraživanja koja bi se mogla nadovezati na ovaj rad.

Poglavlje 2

PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA

Pregled dosadašnjih istraživanja problema kontakta sa smanjenjem kontaktne površine potrebno je promatrati unutar šireg konteksta kontaktne mehanike općenito, naročito stoga što taj problem predstavlja tek jedan mali segment izuzetno široke znanstvene discipline. Iz tog je razloga korisno prije svega izložiti sažet pregled tematike istraživanja i znanstvenih doprinosa koji su obilježili razvoj metoda rješavanja kontaktnih problema.

2.1. Razvoj kontaktne mehanike

2.1.1. Pregled razvoja analitičkih metoda

U uvodnom je poglavlju već spomenuto kako Hertzov značajan rad iz 1882. godine predstavlja začetak kontaktne mehanike kao znanstvene discipline, gdje je u poglavlju 1.2.1 dan kratak pregled osnovnih postavki Hertzove teorije. Nastavno na Hertzov rad naročito su značajni radovi njegovih suvremenika Cerrutija (1882.) i Boussinesqa (1885.), koji su primjenom teorije potencijala razradili temeljne jednadžbe iz kojih se iz poznatih raspodjela normalnih i tangencijalnih kontaktnih opterećenja po površini elastičnog poluprostora mogu pronaći sve komponente naprezanja i pomaka u svim točkama poluprostora. Ti su rezultati, međutim, vrlo načelni po svojoj prirodi jer su njihove jednadžbe u vrlo malom broju slučajeva analitički rješive. Flamant (1892.) je riješio navedene jednadžbe za ravninski problem i koncentrirano opterećenje poluprostora duž linije, a poopćenje tog rješenja na opterećenja raspodijeljena po proizvoljnoj širini u poglavlju 1.4 predstavljeno je izrazima (1.7) – (1.13).

Dominantne pravce istraživanja koja su do sredine 20. stoljeća postavila teorijske temelje u razvoju kontaktne mehanike moguće je sistematizirati u šest kategorija, a to su [6]: ravninski problem poluprostora bez trenja, ravninski problem poluprostora s prianjanjem, ravninski problem poluprostora s trenjem, ravninski problem kontakta dvaju elastičnih tijela i trodimenzionalni kontaktni problem. Najveći doprinos u istraživanjima koja su se bavila problemom elastičnog poluprostora u tom je periodu dao veći broj ruskih i sovjetskih znanstvenika. Tu se po svom pojedinačnom doprinosu najviše ističe Muskhelishvili (1935.), koji je primjenom metoda potencijalnih funkcija kompleksnih varijabli i konformalnih mapa razvio matematičke relacije iz kojih je moguće dobiti polja naprezanja i pomaka. Značajan je doprinos dao i u problematici rješavanja sustava spregnutih singularnih integralnih jednadžbi (1946., 1949.) koje je potrebno riješiti kada su na površini poluprostora poznati pomaci, tj. kada se radi o problemu s rubnim uvjetima klase III (npr. problem plosnatog utiskivača koji pritišće poluprostor), kao i u problemima s mješovitim rubnim uvjetima. Muskhelishvili je također pokazao da se, posve općenito govoreći, kontakt dvaju elastičnih tijela koja se u zoni kontakta može aproksimirati elastičnim poluprostorom može reducirati na slučaj kontakta krutog utiskivača i elastičnog poluprostora.

Probleme elastičnog poluprostora, stoga, uvijek je pratila polazna pretpostavka da je drugo tijelo kruto, a što je kao premisa problema implicitno sadržano i u slučajevima kada se promatra utjecaj poznate raspodjele kontaktnih pritisaka na poluprostor. Nasuprot tome, kontakt dvaju elastičnih tijela poslije Hertza prvi je proučavao Dinnik (1906.), a Beljajev je u nizu radova (1917., 1924., 1929.) odredio gdje se unutar elastičnih tijela nalaze točke maksimalnih naprezanja. Shtaerman (1941.) je razmatrao problem elastičnog cilindra u cilindričnoj rupi s malom zračnošću. Fromm (1927.) je proučavao problem kotrljanja elastičnog valjka po elastičnom poluprostoru, a općenitije probleme međusobnog kotrljanja elastičnih tijela proučavao je i Glagoljev (1945.). Vrlo važne doprinose teoriji poluprostora u brojnim je radovima dao i Galin; između ostalih, istraživao je problem s trenjem na anizotropnom poluprostoru (1943.), utvrdio je da je u poluprostoru uslijed djelovanja utiskivača čiji je profil polinom n-tog stupnja raspodjela kontaktnih pritisaka također polinom istog stupnja podijeljen s jednostavnom algebarskom funkcijom (1947.). Također, dao je procjenu potrebne sile za utiskivač proizvoljnog profila kako bi se u poluprostoru ostvario unaprijed traženi pomak (1948.).

Razmatranjem trenja u kontaktnom problemu i određivanjem zona prianjanja i klizanja prvi se bavio Cattaneo (1938.), i to kroz proširenje Hertzove teorije kontakta dvaju elastičnih tijela. Neovisno od njegovih istraživanja istim se problemom, ali uz upotrebu drugačijih metoda rješavanja, bavio i Mindlin (1949.). Mindlin je pokazao da u slučaju izostanka klizanja na kontaktnoj površini na njenom rubu tangencijalna naprezanja postaju singularna, a da bi se to otklonilo, uvođenjem se Coulombova zakona trenja tangencijalna naprezanja sprežu s normalnim kontaktnim opterećenjima, koja na rubu iščezavaju. Slučaj beskonačnog trenja, odnosno prianjanja utiskivača s poluprostorom proučavao je Goodman kroz pristup u kojem su opterećenje i kontaktna površina inkrementalno povećavani u diskretnim prirastima, a istim se problemom bavio i Muskhelishvili (1942.) – njihovi rezultati, međutim, proizvode fizikalno nerealne singularnosti na rubu kontaktne površine. Muskhelishvili (1942.) se također bavio problemom i kada je na kontaktnoj površini između utiskivača i poluprostora prisutno Coulombovo trenje, pri čemu je i taj problem, kao i mnoge druge u teoriji elastičnog poluprostora, riješio svođenjem na potragu za funkcijom kompleksne varijable koja mora zadovoljavati mješovite rubne uvjete. Paralelno se gotovo istim istraživanjem, ali uz nešto drugačije pretpostavke, bavio i Glagoljev (1942.).

U drugoj polovici 20. stoljeća matematički aparat izgrađen na dotadašnjim istraživanjima kontaktnih problema bio je dovoljno sofisticiran za razradu novih i složenijih analitičkih metoda namijenjenih obradi većeg broja složenijih problema kontaktne mehanike. Iz tih se problema kao skupina od naročite važnosti za ovaj rad može izdvojiti probleme koji uključuju kontakte slojevitih tijela, a čije se analitičko rješavanje izvodilo Fourierovim transformacijama integralnih jednadžbi koje formuliraju konkretan kontaktni problem. Prve je takve radove objavio Sneddon (1951.), a metode transformacije integrala pokazale su se vrlo pogodnima za rješavanje problema u kojima su kao rubni uvjeti poznati pomaci, a traže se raspodjele kontaktnih pritisaka. Općenito govoreći, rješavanje kontaktnog problema u kojemu je jedno tijelo elastični poluprostor, a drugo kruti utiskivač može se riješiti pomoću kompleksnih varijabli i potencijala ili spomenutom primjenom Fourierovih transformacija. Pritom rješenje kontaktnog problema kod oba pristupa uvijek uključuje rješavanje integrala čija podintegralna funkcija opisuje profil utiskivača pa je stoga jasno zbog čega je egzaktno analitičko rješenje moguće samo u slučajevima kada se profil može opisati jednostavnim funkcijama (uglavnom polinomnim). Brojne druge vrste istraživanja u tom periodu obuhvaćale su, na primjer, elastoplastične kontakte, kontakte viskoelastičnih tijela, kontakte izložene dinamičkim opterećenjima, kontakte u uvjetima međusobnog klizanja i kotrljanja tijela, kontakte hrapavih površina, istraživanja naravi i načina modeliranja trenja itd. U analizi naprezanja vrijedno je spomenuti i rad Buflera (1950.), koji je utvrdio da se maksimum raspodjele posmičnih naprezanja pri kotrljanju kod aksijalno simetričnog nekonformnog kontakta prilikom porasta opterećenja odmiče od simetrale za određenu vrijednost i to u smjeru suprotnom od smjera djelovanja tangencijalnog kontaktnog opterećenja.

Izvan domene istraživanja koja su se u prvoj polovici 20. stoljeća gotovo isključivo bavila problemom elastičnog poluprostora, potrebno je izdvojiti vrlo značajan rad Signorinija (1933.,1959.), koji je proučavao ravnotežu linearno elastičnog tijela s krutim osloncem bez trenja te je za takav slučaj formulirao rubne uvjete i kontaktne uvjete. Njegov je rad kasnije matematički nadogradio Fichera (1963.) pružajući dokaze o jedinstvenosti i egzistenciji rješenja varijacijske formulacije kontaktnog problema. Iz varijacijske se formulacije dobiva varijacijska nejednakost koja definira rješenje Signorinijeva problema, a glavna odlika takvog pristupa problemu jest ta da su svi rubni uvjeti, uključujući i sve kontaktne rubne uvjete, objedinjeni u samo jednoj nejednakosti [4,8]. Davaut (1970.) je za Signorinijev problem razradio varijacijsku formulaciju statičkog problema s Coulombovim trenjem u granicama linearne teorije elastičnosti, a Davaut i Lions (1972.) su u često citiranom radu također postavili općenite principe egzistencije i jedinstvenosti rješenja kontaktnih problema. Nastavno na te radove, razradu varijacijske formulacije kontakta, ali bez primjene funkcionalne analize i uvođenja teorema o egzistenciji, napravio je i Kalker (1977.) [7], čija je formulacija primjerenija inženjerskoj praksi i u kojoj je naglasak stavljen na razvoj teorijske podloge za numeričku analizu.

Općenito govoreći, razvoj varijacijske formulacije od iznimnog je teorijskog i praktičnog značaja jer je u drugoj polovici 20. stoljeća doveo do velikih napredaka u kontaktnoj mehanici. Time su osigurani teorijski temelji ne samo za naprednija analitička rješenja, već i za ubrzan razvoj i učinkovitu implementaciju svih u praksi primjenjivanih varijanti numeričkih metoda [1,8], koje prevladavaju brojna ograničenja analitičkih metoda. Povrh navedenog, analitičke su metode s matematičkog aspekta tijekom vremena postale izuzetno zahtjevne i složene pa su numeričke metode, naročito za krajnjeg korisnika, postale alat s kojim se rješavanje problema uglavnom u značajnoj mjeri pojednostavljuje.

2.1.2. Pregled razvoja numeričkih metoda

Primjena numeričkih metoda pružila je mogućnost analize problema čija razina složenosti značajno nadmašuje probleme koji su u prvim desetljećima bili rješavani analitičkim putem. Temeljna ideja sastoji se u diskretizaciji problema, kojeg se na taj način može u matematičkom smislu svesti na sustav linearnih jednadžbi čijim se rješenjem dobiva približno rješenje. Prve metode numeričkog rješavanja kontaktnih problema bile su znatno manje sofisticirane od metoda koje se danas koriste, međutim ipak su davale rezultate koji su pružali vrlo dobra rješenja za neke probleme, kao na primjer u [9]. Osnovni se pristup sastoji u tome da se u realnosti kontinuirana kontaktna opterećenja primjenjuju samo u diskretnim skupovima točaka, odnosno na linijskim odsječcima ili šesterokutnim površinama. Pritom raspodjela kontaktnog opterećenja nad diskretnim dijelom duljine ili površine može biti pretpostavljena kao konstantna, međutim puno se bolje rezultate u pogledu neprekidnosti i derivabilnosti pomaka na površini postiže ukoliko se pretpostavi trokutna ili za 3D probleme šesterokutna piramidalna raspodjela [1,9]. Takve se segmente ukupnog kontaktnog opterećenja uopćeno naziva *elementima pritiska* (eng. *pressure element*). Ukupno se djelovanje na takav način aproksimiranog kontaktnog pritiska dobiva superpozicijom djelovanja svih elemenata pritiska. Rješenje kontaktnog problema navedenim postupkom primjenom direktne metode (postupak inverzije matrice) za slučaj kotrljanja dva različita elastična tijela dali su Bentall i Johnson (1967.), dok su uz pomoć varijacijskog pristupa kroz minimizaciju totalne komplementarne energije Kalker i van Randen (1972.) riješili ne-Hertzov problem bez trenja.

Nasuprot tome, dvije temeljne numeričke metode koje se danas koriste u analizi kontaktnih problema jesu metoda konačnih elemenata (MKE) i metoda rubnih elemenata (MRE), ali se upotrebljavaju i formulacije u kojima se te dvije metode združuju. Metoda konačnih elemenata pristup je u kojemu se čitav volumen tijela diskretizira na konačan broj poddomena – *konačnih elemenata*, unutar kojih postoji pretpostavljena zakonitost raspodjele naprezanja i pomaka. Neke od prvih radova u kojima je MKE po prvi puta upotrijebljena za rješenje kontaktnog problema objavili su Chan i Tuba (1971.) [10,11]. Francavilla i Zienkiewicz (1975.) u svojim su se istraživanjima bavili linearno elastičnim tijelima u kontaktu bez trenja uz pojavu malih pomaka. U skupinu najranijih istraživanja na tu tematiku za ravninske probleme spadaju rad Hughesa, Taylora et al. (1976.) te radovi i doktorska disertacija o elastostatičkim kontaktnim problemima s trenjem koje je objavio Fredriksson (1976.). Okamoto i Nakazawa (1979.) također uključuju u svoja istraživanja i pojavu trenja dobivši rezultate u relativno dobrom slaganju s eksperimentima. Campos, Oden i Kikuchi (1982.) također daju važan doprinos u numeričkom tretmanu kontaktnih problema s trenjem, uz jednako ograničenje na elastične deformacije i male pomake. Kao jedno od značajnijih unaprjeđenja ranijih istraživanja mogu se smatrati radovi koje su objavili Bathe i Chaudhary (1985., 1986.), koji su razvili algoritme za trodimenzionalnu analizu i analizu dinamičkih problema uz prisutnost trenja i velikih pomaka eliminacijom potrebe za *konformnom diskretizacijom* (poklapanje čvorova dvaju tijela u zoni kontakta) dozvoljavajući *nekonformnu diskretizaciju* tijela. Opsežan i kvalitetan pregled te kritičku analizu spomenutih ranih istraživanja na temu primjene MKE u analizi kontaktnih problema moguće je pronaći u doktorskoj disertaciji Laursena [12] (1992.), u kojoj je razvijena formulacija kontakta koja po svojoj razini općenitosti, algoritamske unaprijeđenosti i neovisnosti o načinu diskretizacije domene predstavlja značajan odmak od ograničenja prisutnih u rješenjima razvijenima u prethodno spomenutim radovima. Suvremena rješenja u implementaciji MKE na kontaktne probleme posjeduju sposobnost analize svih postojećih kategorija problema i njihovih međusobnih kombinacija – elastoplastičnost, viskoelastičnost, viskoplastičnost, puzanje, trenje, dinamička opterećenja, veliki pomaci i klizanje, analiza hrapavih površina, analiza širenja pukotina, termomehanička opterećenja itd., pa se s tim u vezi u novijim istraživanjima sve češće analiziraju složeniji problemi u kojima se kombiniraju neke od nabrojanih pojava.

Metoda rubnih elemenata pristup je u kojemu se diskretizacija vrši samo na rubu domene, odnosno na površini tijela, što ju čini naročito pogodnom za modeliranje kontaktnih problema. Prvenstvena prednost takvog načina diskretizacije problema jest smanjenje njegove dimenzionalnosti, s obzirom na činjenicu da je za isti problem potrebno riješiti značajno manji sustav jednadžbi s manjim brojem nepoznanica u odnosu na MKE. MRE u kontaktnoj je mehanici prvi puta primijenjena za rješavanje ravninskog kontaktnog problema u radu kojeg su objavili Andersson, Fredriksson i Persson (1980.), nakon čega je uslijedio veći broj radova koji su u pravilu bili ograničeni ili na ravninske probleme ili na probleme bez trenja. Olukoko, Becker i Fenner (1993.) te Paris, Blazques i Cañas (1995.) razvijaju prve algoritme za nekonformnu diskretizaciju rubnih elemenata, što je dozvoljavalo jednostavnu analizu pojave velikih pomaka. Garrido, Foces i Paris (1994.) su koristeći trokutne konstantne elemente razvili prvi algoritam za analizu trodimenzionalnog kontaktnog problema s trenjem, a naprednije rješenje za istu vrstu problema uz trenje razvijaju Leahy i Becker (1999.). Man (1994.) u lit. [2] formira model koji je primijenjen za analizu kontakta tijela s pukotinama.

Huesman i Kuhn (1995.) razvijaju algoritam za elastoplastičnu analizu kontakta s trenjem, a Abascal (1995.) primjenom MRE analizira kontaktne probleme izložene dinamičkim opterećenjima uz prisutnost trenja. Općenito se može ustvrditi da je nakon navedenih najvažnijih napredaka, metoda rubnih elemenata nakon 1995. godine doživjela vrlo intenzivan razvoj i unaprjeđenje. Keum (2003.) je u svojoj doktorskoj disertaciji [13] i u kasnijem radu [14] (Keum i Liu, 2005.) razvio prvi algoritam baziran na MRE namijenjen trodimenzionalnoj analizi kontaktnih problema s trenjem uz primjenu nekonformne diskretizacije.

Problemi u kojima se MKE i MRE povezuju u pravilu su složeniji od konvencionalnih kontaktnih problema u domeni linearne teorije elastičnosti i uglavnom se temelje na pristupu u kojemu se dijelovi domene od interesa omrežuju i rješavaju onom od dvije metode koja je prikladnija. Dobar primjer slučaja u kojemu se MKE i MRE združuju jest analiza elastoplastičnih kontaktnih problema – Landenberger (1998.) u svojoj doktorskoj disertaciji [15] razvija formulaciju za rješavanje upravo takvih problema uz prisutnost trenja. Landenberger i El-Zafrany (1999.) usvajaju pristup u kojemu se MKE koristi za modeliranje zone kontakta, a MRE za omrežavanje ostatka tijela, dok neki drugi autori pribjegavaju suprotnom pristupu u kojemu se MRE koristi za kontaktnu zonu, a MKE za ostatak tijela.

2.2. Pregled istraživanja kontakta sa smanjenjem kontaktne površine

Istraživanja ove relativno uske kategorije problema unutar kontaktne mehanike moguće je, kako to sugerira i poglavlje 1.3, pratiti na dva odvojena pravca – prvi se odnosi na problem svornjaka u ploči, a drugi na problem elastičnog sloja pritisnutog u podlogu. Kako drugi problem spada u puno širu i vrlo opsežno istraživanu klasu kontaktnih problema koji se općenito bave kontaktnom mehanikom slojevitih tijela, potrebno je napomenuti kako će se ovaj dio detaljnog pregleda istraživanja ciljano ograničiti samo na problematiku gdje prilikom opterećenja dolazi do smanjenja kontaktne površine između sloja i podloge.

2.2.1. Problem elastičnog sloja i podloge

Pojavu odvajanja elastičnog tijela od podloge, ukoliko tijelo ima dovoljno velike duljinske dimenzije u usporedbi sa svojom debljinom h, prvi je predvidio Filon [16] 1902. godine razmatrajući, između ostalih problema, ponašanje elastičnog bloka pravokutnog poprečnog presjeka na krutoj podlozi. U svojim razmatranjima došao je do rezultata prema kojemu se uslijed tlačnog djelovanja koncentrirane sile na udaljenosti otprilike $1{,}35h$ od točke djelovanja te sile na elastičnom bloku javlja negativan pritisak. Takav rezultat jasno upućuje na zaključak kako takvo tijelo ne može biti u kontaktu s podlogom duž cijele svoje baze. Eksperimentalnu su potvrdu tih rezultata kasnije dali Cocker i Filon (1957.) fotoelastičnim mjerenjem koje je pokazalo da je poluširina kontakta b za slučaj dvaju materijala s jednakim elastičnim svojstvima u svom iznosu uistinu otprilike 1,35 puta veća od debljine elastičnog bloka h.

Weitsman (1969.) je istraživao problem osno simetrične raspodjele opterećenja koje djeluje na elastični sloj položen na elastičnom poluprostoru (podlozi), pri čemu je za sloj upotrijebio relacije koje vrijede za klasičnu teoriju savijanja tankih ploča [17]. Takvo pojednostavljenje problema nije davalo zadovoljavajuće rezultate, naročito u slučaju pretpostavljene velike krutosti podloge jer bi se kontaktna površina tada sažimala u samo jednu točku, što je fizikalno nerealno[4]. Pu i Hussain (1969.) su primjenom varijacijske formulacije također rješavali problem ploče na poluprostoru za slučaj osno simetričnog opterećenja, ali u tom je pristupu za rješenje problema potrebno u diferencijalnim jednadžbama upotrijebiti testne funkcije – za slučaj krute podloge oni dobivaju širinu kontakta $1{,}16h$. Isti autori (1970.) u svom radu [18] koriste temeljne jednadžbe elastičnosti za sloj te daju kritičku analizu i usporedbu s Weitsmanovim radom i primjenom teorije ploča.

Prvi koji su u narednim istraživanjima (1970.) u terminologiju kontaktne mehanike uveli pojam kontakta sa smanjenjem kontaktne površine, odnosno izraz *receding contact* u englesku literaturu, jesu Dundurs i Stippes [19], koji su se bavili utjecajem odnosa elastičnih konstanti dvaju tijela na njihov međusobni kontakt. Weitsman (1972.) [20] je razmatrao i problem beskonačno dugačke grede položene na poluprostor, ali zbog pogrešnih pretpostavki koje je uveo u problem ni tu nije dobio rezultate koji su dobro opisivali problem. Keer, Dundurs i Tsai [21] (1972.) razmatraju problem elastičnog sloja na elastičnom poluprostoru za slučaj ravninskog i za slučaj osno simetričnog opterećenja, primjenjujući pritom temeljne jednadžbe teorije elastičnosti za matematičku formulaciju ponašanja elastičnog sloja, čime su dobili rezultate koji vrlo dobro opisuju fiziku problema. U njihovu se radu poluširina kontakta kao rješenje kontaktnog problema dobiva kao vlastita vrijednost homogene Fredholmove integralne jednadžbe, pri čemu svakoj vlastitoj vrijednosti pripada samo jedna moguća kombinacija elastičnih konstanti sloja i podloge. Raspodjela se kontaktnih pritisaka nakon toga dobiva kao integral vlastite funkcije koja je jednoznačno povezana s vlastitom vrijednosti promatranog problema. Nastavno na taj rad Tsai, Dundurs i Keer (1974.) poopćuju svoja razmatranja na slučaj opterećenja koja nisu osno simetrična [22]. Gladwell (1976.) je, kao i Weitsman, proučavao slučaj grede na elastičnom poluprostoru te je uz pretpostavku čistog savijanja i djelovanja koncentrirane sile dobio rezultate [23] koji su u prilično dobrom slaganju s rezultatima iz [21] za slučaj male vrijednosti h.

Temeljna svojstva ovakve vrste kontakata sa smanjenjem kontaktne površine iz navedenih se istraživanja mogu sažeti u trima osnovnim tvrdnjama [1,19,21,22]:

- ✓ smanjenje kontaktne površine je skokovito i do njega u teoriji dolazi s pojavom bilo kojeg intenziteta opterećenja,

[4] Netočnost rezultata koji proizlaze iz teorije ploča ne dolazi do izražaja kada su dimenzije kontaktne površine velike u usporedbi s debljinom ploče/sloja.

- ✓ ukoliko nema kvalitativne promjene u raspodjeli kontaktnih pritisaka, oblik i dimenzije kontaktne površine su konstantni i ne ovise o intenzitetu kontaktnog opterećenja,
- ✓ pomaci, deformacije i naprezanja direktno su proporcionalni intenzitetu opterećenja.

Ratwani i Erdogan (1973.) [24], Civelek i Erdogan (1974.) [25], Erdogan i Ratwani (1974.) [26] rješavali su, kao na primjer i autori u [21], istu vrstu problema primjenom različitih metoda transformacije integrala (Fourierova, Mellinova itd.) i zatim pronalaženjem numeričkog rješenja rezultirajuće singularne integralne jednadžbe. Ratwani i Erdogan (1973.) su u [24] razmatrali slučaj u kojemu se, umjesto unaprijed pretpostavljene konstantne raspodjele pritisaka, opterećenje na elastični sloj prenosi preko krutog valjka, što predstavlja važnu nadogradnju problema jer s povećanjem intenziteta vanjskog opterećenja dolazi do pojave širenja zone kontakta između valjka i sloja. To kao svoju posljedicu ima i promjenu raspodjele kontaktnog opterećenja pa se samim time i poluširina kontakta b isto tako mijenja. Kao nastavak tog istraživanja Civelek i Erdogan (1974.) [25] su u svojim razmatranjima u obzir uzeli i elastičnost utiskivača te slučaj u kojemu poluprostor, sloj i utiskivač imaju različite elastične konstante. U radu [26] autori opterećenje uvode putem pretpostavljenih simetričnih raspodjela pritisaka, a elastični je sloj bez trenja pritisnut na dvije razmaknute polovice elastične poluravnine.

Zajednička odlika svih do sada spomenutih istraživanja jest da se nigdje u obzir nije uzimalo trenje, sloj i poluprostor su smatrani homogenima i izotropnima, težina sloja je zanemarena, a analiza je provođena uz pretpostavku malih pomaka u domeni linearne teorije elastičnosti. Pritom je opterećenje koje se s utiskivača prenosi na elastični sloj uglavnom bilo predstavljeno unaprijed pretpostavljenim normalnim opterećenjima čija se raspodjela s pojavom deformacija ne mijenja. Takva pojednostavljenja omogućuju analitičko rješavanje zadanog problema ili barem njegovu aproksimaciju, na primjer putem uvođenja pretpostavki iz klasične teorije ploča, uvođenjem aproksimativnih izraza koji značajno pojednostavljuju singularne integralne jednadžbe itd.

Nekoliko se radova bavilo problematikom u kojemu se u obzir uzima i djelovanje gravitacije na sloj; kao dobar primjer može se izdvojiti rad Gecita i Erdogana (1978.) [27] u kojemu su razmatrali slučaj vlačnog (koje odvaja) i tlačnog djelovanja opterećenja na sloj – u takvim se slučajevima gubi idealizacija koja dovodi do beskonačno velike zone odvajanja sloja jer na dovoljno velikoj udaljenosti od zone opterećenja utjecaj težine postaje dominantan te se kontakt s podlogom ponovno uspostavlja. Boduroglu i Delale (1980.) uzimaju u obzir utjecaj trenja razmatrajući problem elastičnog sloja pritisnutog u poluprostor koncentriranom silom. Jaffar (1991.) proučava problem klizanja krutog valjka po elastičnoj traci koja se nalazi na krutoj podlozi uz prisutnost trenja. Garrido, Foces i Paris (1991.) [28] prvi modeliraju problem kontakta sa smanjenjem kontaktne površine primjenom MRE, pri čemu su u obzir uzeli i pojavu trenja. Kao jedan od važnijih može se izdvojiti rad kojeg su objavili Garrido i Lorenzana (1998.) [29] u kojemu su primjenom nekonformne diskretizacije (tzv. *node-on-*

element algoritam) i MRE analizirali pojavu velikih pomaka za ravninski problem elastičnog sloja i elastične podloge. U svojim razmatranjima nisu u obzir uzeli trenje, a rezultati za dobivene raspodjele kontaktnih pritisaka s porastom opterećenja i pomaka pokazuju mjerljiva odstupanja od analitičkih rješenja, koja podrazumijevaju analizu malih pomaka. Kauzlarich i Greenwood (2001.) [30] primjenom MKE analiziraju trodimenzionalan model centralno opterećene ploče na krutoj i na elastičnoj podlozi – uspoređujući svoje rezultate s Filonovom hipotezom i rezultatima kasnijih fotoelastičnih mjerenja, ukazuju kako je dobivena zona kontakta manja, naročito u slučaju krute podloge.

Aksogan, Akavci i Arslan (2004.) [31] proučavaju problem nesimetrično opterećenog elastičnog sloja koji je bez trenja oslonjen na dvije razmaknute polovice poluravnine. Takav problem rješavaju metodom transformacije integrala i numeričkog rješavanja rezultirajućih integralnih jednadžbi i uz vrlo dobro slaganje uspoređuju rezultate s rješenjima dobivenima primjenom MKE i MRE. Od većeg broja novijih radova koji problemu također pristupaju metodom rješavanja jednadžbi teorije elastičnosti putem transformacije integrala i rješavanja integralnih jednadžbi, mogu se izdvojiti Comez, Birinci i Erdol (2004.) [32], koji rješavaju problem dvostrukog kontakta sa smanjenjem kontaktne površine. U takvom problemu razmatrali su dva sloja različitih debljina i elastičnih svojstava oslonjena na krutu podlogu. Pritom analitička formulacija problema pomoću integralnih jednadžbi rješavanih numerički dozvoljava bilo kakav analitički zadan profil krutog utiskivača, ali uz zanemarenje pojave trenja. El-Borgi, Abdelmoula i Keer (2006.) [33] pomoću analitički formuliranih i numerički riješenih singularnih integralnih jednadžbi, u kojima su nepoznanice raspodjela kontaktnih pritisaka i poluširina kontakta, istražuju ravninski problem za slučaj kada elastični sloj bez trenja oslonjen na elastični supstrat spada u klasu tzv. FGM (*Functionally Graded Materials*) materijala. Kod takvih se materijala određena mehanička svojstva (smični modul, primjerice) kontinuirano mijenjaju kao funkcija prostornih koordinata. U svom radu ispituju promjenu dimenzija kontaktne površine i raspodjele kontaktnih pritisaka u ovisnosti o debljini sloja i o *parametru nehomogenosti*, koji odražava intenzitet promjene elastičnih konstanti u funkcijski gradiranome mediju (sloju). Kahya, Ozsahin et al. (2007.) [34] istražuju ravninski problem kada su sloj i podloga elastični i anizotropni te međusobno bez trenja pritisnuti krutim utiskivačem kružnog profila, a raspodjele kontaktnih pritisaka i veličine kontaktnih površina analizirane su u ovisnosti o različitim orijentacijama vlakana u materijalu. Rhimi, El-Borgi et al. (2009.) [35] primjenom Hankelovih transformacija na osnovne relacije teorije elastičnosti rješavaju trodimenzionalni problem FGM sloja na elastičnom supstratu bez trenja, što daje rezultate koji se u određenom iznosu razlikuju od analize ravninskog problema u [33]. Comez (2010.) [36] obrađuje ravninski problem elastičnog sloja i elastične podloge pritisnutih krutim utiskivačem cilindričnog profila koji na sloj djeluje silama u normalnom i tangencijalnom smjeru, a na obje se kontaktne površine u obzir uzima trenje.

Problem cikličkog opterećenja elastičnog bloka na krutoj podlozi uz prisutnost trenja primjenom MKE obradili su Ahn i Barber (2008.) [37], odnosno u svojoj doktorskoj disertaciji Ahn (2009.) [38]. Važan rezultat tih istraživanja jest spoznaja da se konstantnost dimenzija kontaktne površine zadržava samo u slučaju monotonog opterećivanja te da se u fazi rasterećenja javlja kontinuiran prijelaz između zona klizanja i prianjanja. U slučaju djelovanja cikličkog opterećenja oko neke srednje vrijednosti različite od nule, sustav se zadržava u oscilatornom stanju u kojemu postoji periodička varijacija dimenzija kontaktne površine te zona klizanja i prianjanja.

2.2.2. Problem svornjaka u ploči

Pod terminom svornjaka u ploči za potrebe se ovog istraživanja ugrubo može objediniti sve slučajeve koji se bave problemom kontakta bilo kakvog cilindričnog tijela smještenog u provrtu nekog drugog tijela. To je na tragu napomena iznesenih u poglavlju 1.3, gdje je naglašena općenita sličnost problema svornjaka, neovisno o činjenici da li između svornjaka i provrta postoji preklop ili zračnost, odnosno neovisno o tome da li u stvarnosti s porastom opterećenja dolazi do smanjenja ili povećanja kontaktne površine.

Neka od najranijih istraživanja svornjaka u ploči proveli su Bickley (1928.) i Knight (1935.), koji su predložili sinusoidalnu formu raspodjele kontaktnih pritisaka oko kružnog provrta u ploči. Prva fotoelastična mjerenja proveli su Frocht i Hill (1940.), a Jessop, Snell i Holister (1958.) fotoelastičnim mjerenjem ispituju raspodjelu naprezanja kada je opterećenje primijenjeno samo na svornjak i kada je opterećenje primijenjeno istovremeno i na svornjak i na ploču. Može se spomenuti da su istraživanja na tu tematiku provodili Stippes, Wilson i Krull (1962.) [39], i to na problemu odvajanja cilindričnog tijela koje se uslijed opterećenja odvaja od matrice. Problem je u svojoj doktorskoj disertaciji riješio Persson (1964.) dobivši polja naprezanja u svornjaku i u ploči za slučaj kada su materijali svornjaka i ploče (matrice) identični, a na svornjak djeluje koncentrirana sila. Problemu je pristupio koristeći postavke teorije potencijala i primijenivši funkcije naprezanja prikladne za cilindar (svornjak) i za kružni provrt u beskonačnoj ploči. Metodama analitičkog rješavanja bavili su se poslije toga, na primjer, Goodman i Keer (1965.), Noble i Hussain (1969.), Margetson i Morland (1970.) [40], Dundurs i Stippes (1970.) [19] te Mostofi i Gohar (1980.).

Ovaj je problem obrađivan i u ranim radovima koji se bave numeričkom analizom kontaktnih problema – Chan i Tuba (1971.) su primjenom MKE u [10] modelirali problem diska u ploči za slučaj savršenog poklapanja dimenzija diska s provrtom i kada je ploča u beskonačnosti podvrgnuta jednoosnom stanju naprezanja. Andersson, Fredriksson i Persson (1980.) u već spomenutom prvom radu koji primjenjuje MRE također obrađuju ovaj problem za slučaj diska (svornjaka) opterećenog koncentriranom silom u svom centru. Ghosh, Dattaguru i Rao (1981.) [41] obrađuju problem za slučaj kada postoji zračnost te isto tako daju analitička rješenja za intenzitet sile pri kojoj nastupa razdvajanje, tj. smanjenje kontaktne površine za slučaj kada u neopterećenom stanju u spoju postoji preklop. Isti autori (1982.) [42] razrađuju eksperimentalnu metodu temeljenu na fotoelastičnim mjerenjima u kojima je moguće pratiti razdvajanje (tj. smanjenje kontaktne površine) zatika i provrta. Analitičko i numeričko razmatranje za istovremeno opterećenje krutog svornjaka i ploče proveli su

Mangalgiri, Ramamurthy et al. (1987.) [43]. Spomenuta istraživanja, kao i mnoštvo drugih u tom periodu, podrazumijevala su analizu u domeni linearne teorije elastičnosti uz zanemarenje trenja. Njihova je prvenstvena svrha bila određivanje raspodjele kontaktnih pritisaka, iznos kontaktnog kuta te polja naprezanja u dvama tijelima u kontaktu. Man (1994.) [2] primjenom MRE radi analizu svornjaka u ploči za slučajeve nulte i pozitivne zračnosti, odvojeno za slučajeve opterećenja ploče i opterećenja svornjaka, ali razmatra i utjecaj trenja.

Velik broj istraživanja bio je usmjeren na proučavanje zakonitosti mogućih načina loma do kojih može doći u spojevima te, povezano s time, utjecaja zamornih opterećenja na širenje pukotina i plastičnih zona. Iz te se skupine mogu izdvojiti Satish Kumar, Dattaguru et al. (1996.) [44], koji su primjenom MKE proveli analizu elasto-plastičnog ponašanja spojeva s preklopom s ciljem predviđanja njihova životnog vijeka uslijed izloženosti cikličkom opterećenju. Pritom su ispitivane promjene zone kontakta i separacije te njihova utjecaja na deformacije, naprezanja i širenje plastičnih zona. S druge strane, vrlo je opsežna i literatura koja obrađuje probleme u kojima ploča spada u klasu kompozitnih materijala (laminati i vlaknima ojačani materijali) te anizotropnih i ortotropnih materijala. Iz te se grupe mogu izdvojiti opsežna istraživanja koja je proveo de Jong, objedinjena u njegovoj disertaciji (1987.) [45], u kojoj je analizirao problem kod kojega u laminatnoj ploči postoji veći broj provrta unutar kojih se nalaze opterećeni svornjaci. Murthy, Dattaguru et al. (1991.) [46] provode analizu naprezanja i nosivosti spojeva u anizotropnim laminatima, a Camanho i Matthews (1997.) [47] daju sistematičan i opširan pregled literature u analizi naprezanja i nosivosti spojeva u vlaknima ojačanim plastikama.

U novijim su radovima, na primjer, Ciavarella i Decuzzi (2001.), kao proširenje Perssonovih rezultata, dali analitička rješenja za općenit slučaj istih [48], a zatim i različitih elastičnih konstanti [49] svornjaka i beskonačne ploče, uz zanemarenje trenja i pretpostavku opterećenja koncentriranom silom s hvatištem u središtu svornjaka. Ispitali su slučaj kada između svornjaka i ploče postoji zračnost i slučaj kada postoji preklop, a iz provedene se analize kao najvažniji rezultat može izdvojiti činjenica da postoji kontaktni kut φ_{lim} koji odgovara slučaju idealnog poklapanja profila (tj. nulte zračnosti) i koji ujedno predstavlja asimptotsko rješenje i za slučaj smanjenja i za slučaj povećavanja kontaktne površine. Općenito govoreći, postoje aproksimativna rješenja za slučaj s trenjem ili za slučaj konačnih dimenzija ploče, međutim pretežna većina postojećih analitičkih modela objavljivanih u literaturi sadrži najmanje dva od tri pojednostavljenja: (i) zanemaruje se trenje, (ii) ploča se uzima kao beskonačna, (iii) pretpostavlja se da materijali svornjaka i ploče imaju ista svojstva. Analitički modeli koji u obzir uzimaju trenje izuzetno su rijetki, a prema autorovim saznanjima Ho i Chau (1997.) [50] prvi su koji su razvili analitički model svornjaka i beskonačne ploče iz različitih materijala koji u obzir uzima i trenje. Dobivena rješenja, međutim, i unutar jednostavnijih problema (tj. identični materijali bez trenja) odstupaju od kasnijih točnijih modela, npr. u [48,49] i [51], jer se uvijek unaprijed pretpostavlja kontaktni polukut od 90°, što nije fizikalno realna pretpostavka.

Iyer (2001.) [51] provodi vrlo opširnu numeričku analizu primjenom MKE u kojoj je problem modeliran uz pretpostavku idealnog poklapanja profila i za dva slučaja geometrije – kada je ploča beskonačna (jednoosno stanje naprezanja u ploči) i kada su njene dimenzije konačne (za što je razmotreno i dvoosno stanje naprezanja), a na kontaktnoj je površini uzeta u obzir pojava trenja. U tom je radu, osim razlika između rješenja za konačne i beskonačne dimenzije ploče, analiziran utjecaj različitih vrijednosti koeficijenta trenja na raspodjele kontaktnih pritisaka i kontaktni kut te je ispitano nekoliko različitih kombinacija materijala. Kod konačnih dimenzija ploče kontaktni je kut u pravilu veći, a maksimalni kontaktni pritisak manji, utjecaj koeficijenta trenja na raspodjele kontaktnih pritisaka je značajan i svojim porastom također smanjuje maksimalni kontaktni pritisak. Utjecaj razlika elastičnih konstanti materijala je gotovo zanemariv ukoliko se zanemaruje trenje, a značajnijeg utjecaja na raspodjelu kontaktnih pritisaka ima samo kada postoji trenje i kada su i razlike svojstava materijala relativno velike. Jednako tako, povećanje koeficijenta trenja i konačne dimenzije ploče značajno povećavaju intenzitet tangencijalnih naprezanja, kao i faktor koncentracije naprezanja oko kružnog provrta. Pokazano je da od svih razmotrenih utjecajnih parametara razlika svojstava materijala ima pojedinačno najmanji utjecaj, što potvrđuje ranije eksperimentalne rezultate Frochta i Hilla (1940.).

Hou i Hills (2001.) [52] analitički rješavaju problem bez trenja za slučaj zračnosti i preklopa i različitih elastičnih konstanti i kvalitativno potvrđuju rezultate iz [48] i [49] dobivši za ravninsko naprezanje asimptotsku vrijednost za polovicu kontaktnog kuta $\varphi_{\text{lim}} \approx 84°$. Isti autori u [53] (2001.) problem s preklopom rješavaju posve drugačije od konvencionalnog pristupa baziranog na Perssonovim rezultatima – umjesto razmatranja deformacija tijela i uvođenja uvjeta kompatibilnosti na kontaktnoj površini, ovakav je kontaktni problem, s obzirom na svoje specifičnosti, sveden na promatranje monolitnog tijela koje se potom prema potrebi može razdvojiti i/ili modificirati uslijed pojave odvajanja, plastičnosti itd. Pritom se razmatra elastičan slučaj kod kojega opterećenje ne uzrokuje niti klizanje niti razdvajanje površina. U [54] (2002.) isti autori na temelju pristupa iz [53] razvijaju formulaciju u kojoj u obzir uzimaju razdvajanje površina te njihovo međusobno klizanje uz prisutnost trenja.

Nastavno na rezultate iz [47] i [48], Ciavarella, Baldini et al. (2006.) [55] primjenom metode konačnih elemenata obradili su slučaj zatika u provrtu s čahurom te ispitali promjenu parametara kontakta u ovisnosti o prirodi dosjeda. U ovisnosti o vrsti dosjeda uvode pojam progresivnog i regresivnog kontakta, a rezultati ovakve numeričke analize također su pokazali da se, neovisno o dosjedu, u opterećenom stanju vrijednost kontaktnog kuta asimptotski približava graničnoj vrijednosti φ_{lim}, koja odgovara slučaju opterećenog spoja s pretpostavljenim idealnim poklapanjem profila. U obzir su također uzeli i pojavu trenja.

Poglavlje 3

ANALITIČKA FORMULACIJA I NUMERIČKE METODE

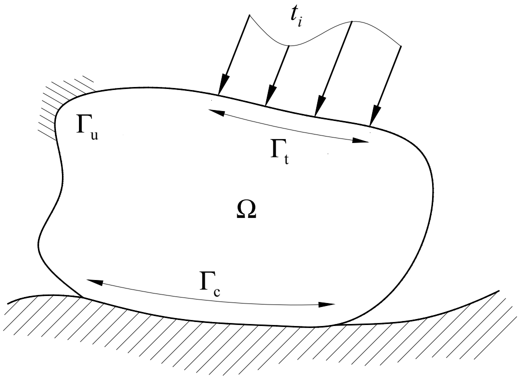
3.1. Formulacija kontaktnih problema

Metoda konačnih elemenata i metoda rubnih elemenata upotrebljavaju se u numeričkom rješavanju kontaktnih problema. Sama primjena navedenih metoda u rješavanju kontaktnih problema zahtijeva polaznu analitičku formulaciju pogodnu za diskretizaciju na temelju koje je moguće dobiti sustave linearnih algebarskih jednadžbi.

Općenitu je formulaciju problema kontakta elastičnog tijela s krutim osloncem dao Signorini, a dva najvažnija pristupa matematičkoj formulaciji kontaktnih problema u svrhu rješenja Signorinijeva problema spadaju u klasu varijacijskih formulacija. Prva se formulacija izvodi na temelju *varijacijske nejednakosti*, a druga na temelju *varijacijske jednakosti*, koje su najpogodnije za implementaciju metode konačnih elemenata. S druge strane, metoda rubnih elemenata vrlo je pogodna i u tzv. direktnoj formulaciji koja je na jednostavan i izravnan način povezana s fizikom problema i u kojoj se ne koristi varijacijski pristup, već se temeljne jednadžbe metode, kako će biti i prikazano u poglavlju 3.2, mogu primjenom određenih fizikalnih zakonitosti i teorema izvesti pomoću mjerljivih fizikalnih veličina poput sila i pomaka.

3.1.1. Signorinijev problem i kontaktni uvjeti

U Signorinijevu problemu, prikazanom na slici 6, promatra se elastično tijelo u kontaktu bez trenja s krutim osloncem. Tijelo je u općem slučaju izloženo površinskim silama t_i i volumenskim silama f_{Vi} i ima zadane rubne uvjete u vidu poznatih pomaka na dijelu ruba Γ_u i poznatih sila na dijelu ruba Γ_t. Za takav je problem potrebno pronaći polje pomaka u_i koje odgovara ravnotežnom stanju tijela za zadane veličine volumenskih i površinskih sila.



Sl. 6. Signorinijev problem; Γ_c – dio ruba domene tijela Ω koji predstavlja potencijalnu kontaktnu površinu, Γ_t – dio ruba gdje su zadane površinske sile, Γ_u – dio ruba gdje su zadani pomaci

Tijelo prikazano na slici 6 mora u stanju statičke ravnoteže istovremeno zadovoljiti jednadžbe ravnoteže (Cauchyjeve jednadžbe) u domeni Ω, zadane rubne uvjete na Γ_u i Γ_t te tzv. *kontaktne uvjete* na Γ_c, odnosno redom [4,8,56]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_{\mathrm{V}i} = 0 \quad \text{na } \Omega, \tag{3.1.a}$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{na } \Gamma_\mathrm{u}, \tag{3.1.b}$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad \text{na } \Gamma_\mathrm{t}, \tag{3.1.c}$$

$$u_i n_i - d_{\mathrm{n}0} \leq 0 \quad \text{na } \Gamma_\mathrm{c}, \tag{3.1.d}$$

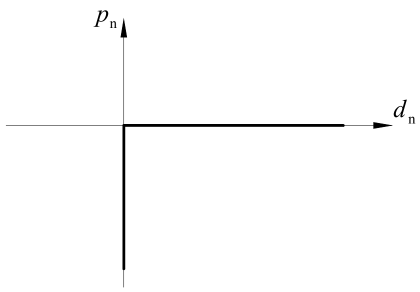
$$d_\mathrm{n} = d_{\mathrm{n}0} - u_i n_i = 0 \Rightarrow p_\mathrm{n} \leq 0 \quad \text{na } \Gamma_\mathrm{c}. \tag{3.1.e}$$

gdje je d_{n0} početna udaljenost promatrane točke na rubu od točke na krutoj podlozi na pravcu normale na krutu podlogu, n_i su komponente jediničnog vektora normale na rub $\mathbf{n} = n_i e_i$, a e_i su jedinični vektori koordinatnog sustava. Pritom kontaktna površina nije poznata unaprijed, ali je sadržana na dijelu ruba Γ_c. Polje pomaka u_i koje odgovara ravnotežnom stanju, odnosno koje zadovoljava sve uvjete iz (3.1), predstavlja rješenje Signorinijeva problema.

Kontaktni uvjeti određeni izrazima (3.1.d) i (3.1.e) impliciraju tri temeljne zakonitosti koje uvijek moraju biti ispunjene na kontaktnoj površini. To su: (i) kompatibilnost pomaka (geometrijski uvjet), odnosno nemogućnost prodiranja jednog tijela u drugo, (ii) nemogućnost postojanja vlačnog kontaktnog opterećenja (statički uvjet) te (iii) nepostojanje rada kontaktnih sila "na daljinu" (uvjet komplementarnosti). Kontaktne se uvjete u skladu s navedenim zakonitostima može sažeto objediniti u sljedećim uvjetima:

$$d_\mathrm{n} \geq 0 \quad ; \quad p_\mathrm{n} \leq 0 \quad ; \quad p_\mathrm{n} d_\mathrm{n} = 0, \tag{3.2}$$

koji su poznati i kao *Hertz-Signorini-Moreauovi uvjeti jednostranog kontakta*. Pritom se pod pojmom jednostranog kontakta podrazumijeva fizička odijeljenost dvaju tijela u kontaktu, tj. neprodiranje tijela duž kontaktne površine, kao i nemogućnost prenošenja vlačnih sila s jednog tijela na drugo. Drugim riječima, kontaktne sile mogu biti samo tlačne (negativne po svom predznaku) ili jednake nuli ukoliko kontakt nije ostvaren. Grafički prikaz zakona jednostranog normalnog kontakta, određenog uvjetima iz izraza (3.2), dan je na slici 7.



Sl. 7. Zakon jednostranog normalnog kontakta

3.1.2. Varijacijska formulacija

Varijacijska nejednakost:

Formulacija kontaktnog problema primjenom varijacijske nejednakosti počiva na principu virtualnih radova izraženog u obliku nejednakosti, a svi rubni uvjeti, uključujući i kontaktne uvjete, uključeni su u jednu jednadžbu koju se naziva varijacijska nejednakost [56].

Neka W_i predstavlja skup svih kinematički prihvatljivih polja pomaka nad domenom Ω i neka je proizvoljni element tog skupa polje pomaka $w_i \in W_i$. Sada se može definirati takav podskup S_i od polja pomaka W_i za kojeg na Γ_c vrijedi [4,8,56]

$$S_i = \left\{ w_i \in W_i \middle| \, w_i n_i - d_{n0} \leq 0 \quad \text{na } \Gamma_c \right\}. \tag{3.3}$$

Pritom i za polje pomaka u_i, koje je definirano kao rješenje Signorinijeva problema, također mora vrijediti $u_i \in W_i$ kao i $u_i \in S_i$.

Princip virtualnih radova može se posve općenito napisati u sljedećem obliku [3,8,56]:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega f_{Vi} \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_c} p_{ni} \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \delta u_i^m \,, \tag{3.4}$$

gdje je

$$\delta u_i = w_i - u_i \tag{3.5}$$

kinematički moguć virtualni pomak, a $\delta\varepsilon_{ij}$ komponente tenzora virtualne deformacije uslijed virtualnih pomaka δu_i. Na lijevoj strani znaka jednakosti u (3.4) nalazi se rad unutrašnjih sila, dok su s desne strane znaka jednakosti redom: rad volumenskih sila f_{Vi}, rad površinskih sila t_i, rad kontaktnih sila p_{ni} te rad na pomacima u_i^m u točkama m u kojima djeluju koncentrirane sile P^m.

Virtualni rad kontaktnih sila, odnosno posljednji integral u izrazu (3.4), uvijek mora biti veći od ili jednak nuli [4,8,56]. Ispuštanjem tog člana iz jednadžbe jednakosti virtualnih radova (3.4), dobiva se izraz za varijacijsku nejednakost na temelju koje se problem svodi na zadaću u kojoj je potrebno pronaći polje pomaka u_i

$$u_i \in S_i \left| \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega \geq \int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\mathrm{f}} f_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \delta u_i^m \quad \forall w_i \in S \right. . \tag{3.6}$$

Polje pomaka u_i koje je rješenje nejednakosti iz izraza (3.6) ujedno minimizira i totalnu potencijalnu energiju sustava [8,56] te se postupak rješavanja može, prema tome, postaviti kao optimizacijski problem. Općenito govoreći, rješavanje varijacijske nejednakosti oslanja se na rješavanje ekvivalentnog optimizacijskog problema. Totalni potencijal sustava Π, koji odgovara proizvoljnom polju pomaka u_i, definira se općenito kao razlika potencijalne energije deformiranja i potencijala vanjskog opterećenja, odnosno

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} u_i \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\mathrm{t}} t_i u_i \mathrm{d}\Gamma - \sum_m P_i^m \delta u_i^m , \tag{3.7}$$

gdje je C_{ijkl} tenzor elastičnih konstanti. Za polje pomaka u_i koje je rješenje izraza (3.6) mora vrijediti, kako je već rečeno,

$$\Pi(u_i) \leq \Pi(w_i) \quad \forall w_i \in S_i , \tag{3.8}$$

a optimizacijski se problem može u konačnici izraziti kao

$$\min \Pi(u_i), \quad \text{uz } u_i n_i - d_{\mathrm{n}0} \leq 0, \tag{3.9}$$

za kojeg postoji jedinstveno rješenje.

S druge strane, kontaktni problem primjenom varijacijske nejednakosti nije moguće direktno riješiti kao klasičan optimizacijski problem s ograničenjima u vidu nejednakosti ukoliko se u razmatranje uzme i pojavu trenja. Signorinijev se problem u slučaju prisutnosti tangencijalnih sila trenja može napisati u obliku varijacijske nejednakosti druge vrste[5] [8]

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\mathrm{c}} \mu p_\mathrm{n} |\delta u_\mathrm{t}| \mathrm{d}\Gamma \geq \int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\mathrm{t}} t_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \delta u_i^m , \tag{3.10}$$

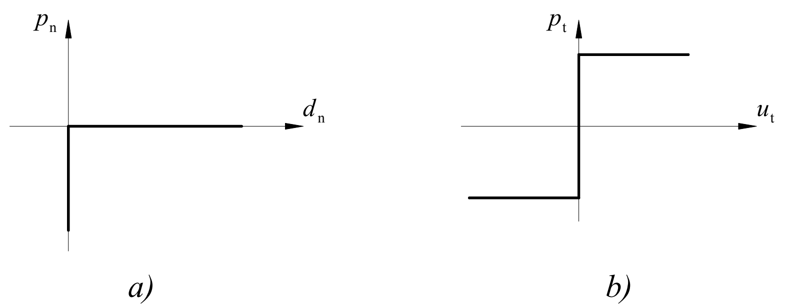
a kontaktne uvjete iz (3.1) potrebno je sada proširiti dodatnim izrazima:

[5] Varijacijske nejednakosti prve vrste odnose se općenito na probleme definirane nad bilo kojim konveksnim podskupom prostora na kojemu je definiran skup traženih funkcija. U varijacijske nejednakosti druge vrste spadaju one koje u svojoj formulaciji uključuju i nederivabilne članove.

$$\begin{aligned} &d_{\mathrm{n}} = 0 \;\Rightarrow\; |p_{\mathrm{t}}| \le \mu p_{\mathrm{n}}, \\ &|p_{\mathrm{t}}| < \mu p_{\mathrm{n}} \;\Rightarrow\; u_{\mathrm{t}} = 0, \\ &|p_{\mathrm{t}}| = \mu p_{\mathrm{n}} \;\Rightarrow\; |u_{\mathrm{t}}| > 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Fizikalno se značenje izraza (3.10) može sažeti u principu da za virtualni pomak δu_i, koji odgovara odmaku od ravnotežne konfiguracije pomaka u_i, virtualni rad vanjskih sila ne može nadvladati elastični otpor deformacije i virtualni rad disipiran trenjem.

Za razliku od kontakta bez trenja, grafički prikaz kontaktnih uvjeta za slučaj s pojavom trenja potrebno je, zbog dodatnih kontaktnih uvjeta iz izraza (3.11), dopuniti dijagramom koji kvalitativno opisuje odnos tangencijalnog pomaka i tangencijalne sile na kontaktnoj površini, što je prikazano na slici 8.b.



Sl. 8. Kontaktni uvjeti za problem s pojavom trenja: a) zakon jednostranog kontakta, b) Coulombov zakon trenja

Za izraz (3.10) ne postoji odgovarajući funkcional na kojeg bi se moglo primijeniti standardne optimizacijske metode[6], odnosno ne postoji ekvivalentan optimizacijski problem s potrebnim svojstvima [8,56,57]. To prvenstveno proizlazi iz činjenice da Coulombov zakon trenja unosi u varijacijsku nejednakost izraz koji nije derivabilan[7]. Povrh toga, kontaktna površina, rubni uvjeti za pomake na kontaktnoj površini, normalne komponente kontaktnih pritisaka, kao i tangencijalne komponente (tj. sile uslijed trenja), koje ovise o normalnim komponentama sila, u većini su slučajeva sve odreda nepoznate veličine.

Rješavanje varijacijske nejednakosti za problem s pojavom trenja značajno je složenije i općenito zahtijeva inkrementalno i iterativno rješavanje. Jedan od mogućih pristupa opisan je u [57] i sastoji se od naizmjeničnog rješavanja dvaju koraka kojima odgovaraju dva specijalna slučaja varijacijske nejednakosti, tzv. *reducirani varijacijski problemi*. U prvom se koraku može pretpostaviti da je poznata raspodjela tangencijalnih komponenti kontaktnih opterećenja

[6] Pod standardnim se optimizacijskim metodama podrazumijevaju matematički postupci kojima se do ekstremne vrijednosti funkcije dolazi uz pretpostavku neprekidne i dva puta derivabilne funkcije cilja.

[7] Nederivabilnost člana koji uključuje sile trenja proizlazi iz same strukture Coulombova modela, koji stanje prianjanja i klizanja razdvaja „skokovito“, odnosno prijelaz između tih dvaju stanja događa se u točki, što je matematički izraženo članom pod znakom apsolutne vrijednosti.

p_t , na temelju čega se može odrediti normalne komponente kontaktnih sila i kontaktna površina, a varijacijska nejednakost za takav slučaj ima oblik

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega \geq \int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\mathrm{t}} t_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_\mathrm{c}} p_\mathrm{t} \delta u_\mathrm{t} \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \delta u_i^m \,, \tag{3.12}$$

čiji je ekvivalentni optimizacijski problem određen minimizacijom funkcionala

$$\Pi_{(\mathrm{I})} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} u_i \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\mathrm{t}} t_i u_i \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_\mathrm{c}} p_\mathrm{t} u_\mathrm{t} \mathrm{d}\Gamma - \sum_m P_i^m \delta u_i^m \,. \tag{3.13}$$

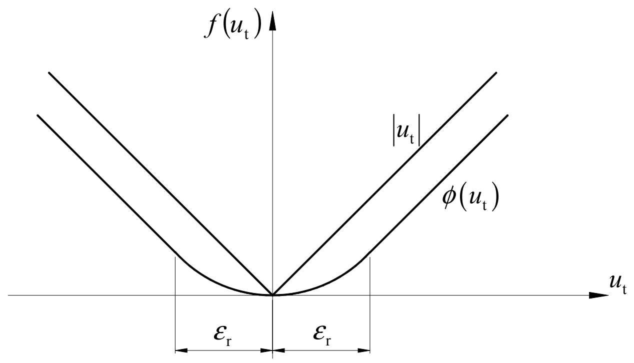
Nakon toga se u drugom koraku na temelju poznatih normalnih kontaktnih pritisaka određuje polje pomaka i raspodjela tangencijalnih kontaktnih sila, a varijacijska nejednakost sada glasi

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\mathrm{c}} \mu p_\mathrm{n} |\delta u_\mathrm{t}| \mathrm{d}\Gamma \geq \int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\mathrm{t}} t_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_\mathrm{c}} p_\mathrm{n} \delta u_\mathrm{n} \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \delta u_i^m \,, \tag{3.14}$$

čiji je ekvivalentni optimizacijski problem određen funkcionalom [4,57,58]

$$\Pi_{(\mathrm{II})} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\mathrm{c}} \nu p_\mathrm{n} |u_\mathrm{t}| \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} u_i \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\mathrm{t}} t_i u_i \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_\mathrm{c}} p_\mathrm{n} u_\mathrm{n} \mathrm{d}\Gamma - \sum_m P_i^m \delta u_i^m . \tag{3.15}$$

Čitav se navedeni postupak za svaki inkrement ponavlja sve dok se ne postigne konvergencija rješenja. Pritom se nederivabilni član kojim u izrazu (3.14) doprinose sile trenja aproksimira uvođenjem derivabilnog izraza $\phi(u_\mathrm{t})$ (eng. *regularized friction term*) koji, kako je prikazano na slici 8, ovisi i o realnom parametru $\varepsilon_\mathrm{r} > 0$. Uvođenjem se takve derivabilne aproksimacije omogućuje primjena standardnih postupaka optimizacije.



Sl. 9. Derivabilna aproksimacija funkcije $|u_t|$

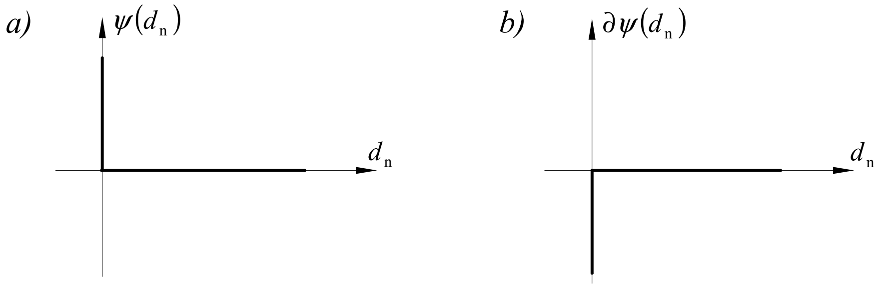
Najčešće primjenjivani oblik aproksimacije dan je sljedećim izrazom [8]:

$$\phi(u_{\mathrm{t}}) = \begin{cases} u_{\mathrm{t}} - \dfrac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{r}} & , u_{\mathrm{t}} \geq \varepsilon_{\mathrm{r}}, \\ \dfrac{1}{2\varepsilon_{\mathrm{r}}} u_{\mathrm{t}}^{2} & , |u_{\mathrm{t}}| \varepsilon_{\mathrm{r}}, \\ -u_{\mathrm{t}} + \dfrac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{r}} & , u_{\mathrm{t}} \leq -\varepsilon_{\mathrm{r}}, \end{cases} \tag{3.16}$$

koji se približava funkciji $|u_{\mathrm{t}}|$ kada $\varepsilon_{\mathrm{r}} \rightarrow 0$, ali upotrijebiti se mogu i drugi oblici funkcije $\phi(u_{\mathrm{t}})$ ukoliko zadovoljavaju navedeni uvjet konvergencije za $\varepsilon_{\mathrm{r}} \rightarrow 0$. Upotrebom tako formuliranog derivabilnog izraza, za član funkcionala koji uključuje sile trenja može se pisati

$$\lim_{\varepsilon_{\mathrm{r}} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\mathrm{c}}} \nu p_{\mathrm{n}} \phi(u_{\mathrm{t}}, \varepsilon_{\mathrm{r}}) \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{\mathrm{c}}} \nu p_{\mathrm{n}} |u_{\mathrm{t}}| \mathrm{d}\Gamma . \tag{3.17}$$

Osim do sada opisanih metoda, rješavanju kontaktnih problema bez i sa trenjem može se pristupiti i uvođenjem matematičkih koncepata subdiferencijala i subgradijenta (značenje i notacija objašnjeni su u prilogu A), koji se koriste u nekontinuiranoj ili nediferencijabilnoj optimizaciji (eng. *non-smooth optimization*). Subdiferencijal *indikator funkcije* istovjetan je grafu zakona jednostranog normalnog kontakta (prikazanog na slici 7) pa se sama indikator funkcija može smatrati tzv. *pseudopotencijalom kontaktnih sila* (prikazan na slici 10.a), jer se diferenciranjem takvog potencijala iz njega mogu izvesti kontaktne sile[8] [56,58].



Sl. 10. Grafički prikaz za: (a) pseudopotencijal kontaktnih sila, (b) subdiferencijal pseudopotencijala – zakon jednostranog normalnog kontakta

Normalne se kontaktne sile mogu, stoga, definirati kao subgradijent, odnosno kao element subdiferecijala $\partial\psi\,(d_{\mathrm{n}})$ pseudopotencijala $\psi\,(d_{\mathrm{n}})$

$$p_{\mathrm{n}} \in \partial\psi(d_{\mathrm{n}}), \tag{3.18}$$

što u skladu sa svojstvima funkcije $\psi\,(d_{\mathrm{n}})$ i njenog subdiferencijala implicira uvjete

[8] Pseudopotencijal kontaktnih sila određen indikator funkcijom (slika 10) implicira kako je za prodor jednog čvrstog tijela u drugo potrebna beskonačna količina energije, dok za njihovo razdvajanje nije potreban nikakav utrošak energije.

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{n}} > 0 &\Rightarrow p_{\mathrm{n}} = 0, \\ d_{\mathrm{n}} = 0 &\Rightarrow p_{\mathrm{n}} \in [0, \infty), \end{aligned} \tag{3.19}$$

koji su ekvivalentni uvjetu iz izraza (3.1.e). Na temelju izraza (3.18) i u skladu sa spomenutim fizikalnim značenjem zakona jednostranog kontakta, ukupnom se potencijalu sustava može pribrojiti pseudopotencijal kontaktnih sila (indikator funkcija). Time se dobiva optimizacijski problem bez ograničenja [56]

$$\min\{\Pi(u_i) + \psi[d_{\mathrm{n}}(u_i)]\}, \tag{3.20}$$

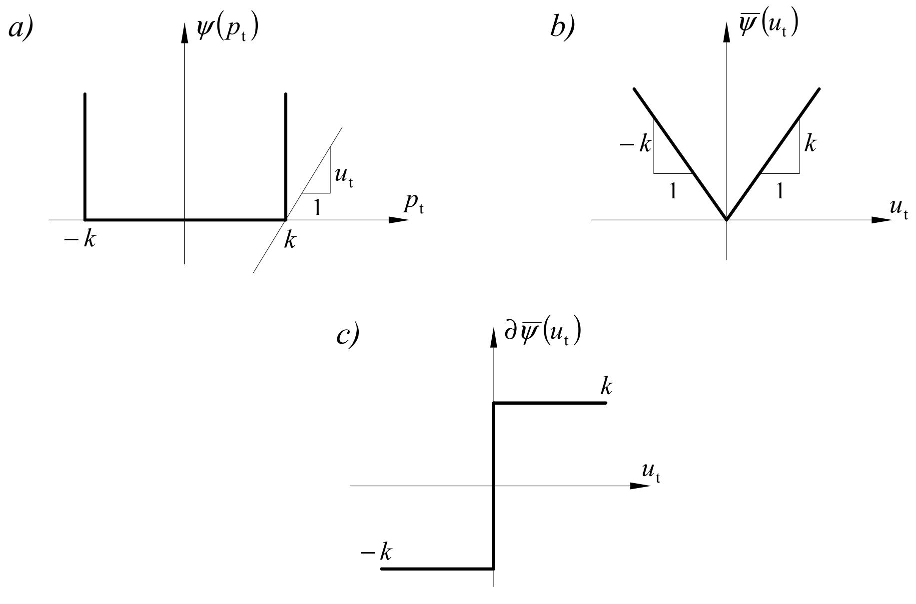
čije je rješenje ekvivalentno rješenju optimizacijskog problema iz izraza (3.9).

Za kontaktni se problem s trenjem sile trenja (tangencijalne sile) također mogu prikazati u obliku subdiferencijala, ali se za njih subdiferencijal traži za *konjugiranu (dualnu) funkciju* (čija je definicija dana u prilogu A) indikator funkcije [56]. Samu indikator funkciju u tu je svrhu potrebno definirati nad domenom određenom konveksnim skupom

$$D(p_{\mathrm{n}}) = \{p_{\mathrm{t}} \| p_{\mathrm{t}}| \le k\} \quad , k = \mu p_{\mathrm{n}}, \tag{3.21}$$

koji u slučaju ravninskog problema predstavlja interval $[-k, k]$, pa indikator funkcija, čiji je graf prikazan na slici 11.a, glasi

$$\psi(p_{\mathrm{t}}) = \begin{cases} 0 & , |p_{\mathrm{t}}| \le k, \\ +\infty & , |p_{\mathrm{t}}| > k. \end{cases} \tag{3.22}$$



Sl. 11. Coulombov zakon trenja: a) indikator funkcija, b) konjugirana (dualna) funkcija, c) subdiferencijal konjugirane funkcije

Tangencijalni pomak u_t, kako je vidljivo sa slike 11.a, u stvari je subgradijent funkcije $\psi(p_t)$ pa za tangencijalni pomak vrijedi

$$\begin{aligned} |p_t| < k \;\Rightarrow\; u_t = 0, \\ |p_t| = k \;\Rightarrow\; |u_t| \in [0, \infty), \end{aligned} \tag{3.23}$$

što je ekvivalentno kontaktnim uvjetima iz izraza (3.11).

Konjugirana funkcija indikator funkcije dane u izrazu (3.22), prikazana je na slici 11.b, a po općenitoj definiciji dana je izrazom

$$\overline{\psi}(u_t) = \sup_{p_t \in D} [u_t p_t - \psi(p_t)]. \tag{3.23}$$

S obzirom na oblik funkcije $\psi(u_t)$, konjugirana funkcija iz izraza (3.23) ima konačan oblik

$$\overline{\psi}(u_t) = \begin{cases} u_t k & , u_t > 0, \\ 0 & , u_t = 0, \\ -u_t k & , u_t < 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Deriviranjem konjugirane funkcije dobiva se njen subdiferencijal, prikazan na slici 11.c, koji je istovjetan Coulombovu zakonu trenja, iz čega je vidljivo da je sile trenja, odnosno tangencijalne kontaktne sile, također moguće formulirati u subdiferencijalnom obliku. Konjugirana funkcija predstavlja, stoga, pseudopotencijal tangencijalnih kontaktnih sila, a sama tangencijalna sila je subgradijent pseudopotencijala, tj. konjugirane funkcije, odnosno

$$p_t \in \partial \overline{\psi}(u_t). \tag{3.25}$$

Analogno slučaju normalnih kontaktnih sila i ovdje se može postaviti minimizacijski problem bez ograničenja pribrajanjem pseudopotencijala tangencijalnih kontaktnih sila ukupnom potencijalu sustava, čime se dobiva

$$\min\{\Pi(u_i) + \overline{\psi}[u_t(u_i)]\} \tag{3.26}$$

i čije je rješenje istovjetno minimizaciji funkcionala danog u izrazu (3.15).

Za rješenje realnog kontaktnog problema ukupnom se potencijalu sustava moraju pribrojiti pseudopotencijali i za normalne i za tangencijalne kontaktne sile, izrazi (3.20) i (3.26), što znači da je potrebno riješiti sljedeći optimizacijski problem

$$\min\{\Pi(u_i) + \psi[d_n(u_i)] + \overline{\psi}[u_t(u_i)]\}. \tag{3.27}$$

Općenito govoreći, opisani pristup, kod kojega se koristi formulacija s pseudopotencijalima i metode nediferencijabilne optimizacije, matematički je složen i može u nekim slučajevima imati problema s konvergencijom rješenja [56].

Varijacijska jednakost:

U formulaciji u kojoj se problem rješava primjenom varijacijske jednakosti, umjesto minimiziranja potencijalne energije, izravno se koristi princip virtualnih radova, uzimajući u obzir i kontakne sile koje djeluju na dijelu ruba Γ_c, koji definira kontaktnu površinu. Ovakav je pristup vrlo pogodan za implementaciju metode konačnih elemenata i podloga je većini komercijalnih softverskih paketa dostupnih na tržištu. Općenito se može ustvrditi kako je ovaj pristup, naročito s aspekta inženjerske primjene, pri rješavanju problema s trenjem puno rašireniji od primjene varijacijske nejednakosti [56].

Varijacijsku se jednakost, odnosno ravnotežu virtualnih radova unutarnjih i vanjskih sila, uz pretpostavku prisutnosti tangencijalnih kontaktnih sila zbog trenja, može napisati u sljedećem obliku:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_c} p_{\mathrm{n}i} \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_c} p_{\mathrm{t}i} \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \delta u_i^m \,, \tag{3.28}$$

pri čemu vrijede rubni i kontaktni uvjeti definirani izrazima (3.1) i (3.11). Kontaktni se pomaci i sile u ovom slučaju tretiraju kao nepoznanice koje definiraju rješenje problema [4,56]. Problem rješenja varijacijske jednakosti (3.28) može se, prema tome, sročiti na sljedeći način: *potrebno je pronaći polje pomaka u_i i komponente kontaktnih opterećenja p_i koji zadovoljavaju sve rubne i kontaktne uvjete*.

Kako kontaktna površina nije u općem slučaju unaprijed poznata, nije poznat ni integral u izrazu (3.28) na dijelu ruba Γ_c, što znači da problem u numeričkoj proceduri svakako treba rješavati inkrementalno i iterativno. U takvom se pristupu na početku prvog inkrementa pretpostavlja da je kontaktna površina poznata [56,59], nakon čega rješenje kroz potreban broj iteracija od početne pretpostavke konvergira do stvarnih vrijednosti koje zadovoljavaju rubne i kontaktne uvjete. Nakon postignute konvergencije rješenja, opterećenje se povećava za zadanu vrijednost inkrementa, a postupak se ponavlja sve dok vrijednost narinutog vanjskog opterećenja ne poprimi zadane vrijednosti.

3.1.3. Pristupi u implementaciji kontaktnih uvjeta

Numeričko rješavanje kontaktnog problema podrazumijeva prikladan matematički tretman kontaktnih uvjeta kompatibilnosti pomaka, odnosno nemogućnosti prodiranja jednog tijela u drugo, a u slučaju kontakta s trenjem podrazumijeva i razmatranje uvjeta prianjanja i klizanja. Kako diskretizacija problema u svrhu dobivanja numeričkog rješenja svaki zadani problem prevodi u sustav algebarskih jednadžbi, to pristupe rješavanja kontaktnih problema treba promatrati unutar problematike rješavanja sustava algebarskih jednadžbi sa zadanim uvjetima (ograničenjima). U kontaktnoj mehanici najčešće se susreću tri metode koje se nalazi u širokoj primjeni u problematici optimizacije s ograničenjima: *penalty* metoda i metoda Lagrangeovih multiplikatora, kao dvije temeljne metode, te proširena Lagrangeova metoda (eng. *augmented Lagrangian approach*), koja objedinjuje neke komparativne prednosti prvih dviju metoda. Temeljne ideje i koncepte navedenih metoda korisno je objasniti na kontaktnom problemu bez trenja razmatrajući proizvoljnu zasebnu točku (čvor) koja dolazi u kontakt.

Penalty metoda najčešće je korištena metoda kod komercijalnih softvera i u svojoj se osnovi sastoji u transformaciji zadanog sustava jednadžbi i njegovih ograničenja u novi sustav jednadžbi u kojeg su ograničenja implicitno ugrađena. Na taj se način optimizacijski problem s ograničenjima transformira u optimizacijski problem bez ograničenja. Spomenuta se transformacija izvodi množenjem *penalty faktora* ili *penalizirajuće vrijednosti* s veličinom koja daje mjeru „narušavanja“ zadanog ograničenja te zatim pribrajanjem tako formiranog izraza funkciji cilja. U kontekstu kontaktne mehanike to znači da je funkcionalu potencijalne energije potrebno pribrojiti umnožak penalizirajuće vrijednosti ε i prodora[9] δ, pri čemu takav umnožak mora svojim oblikom odgovarati izrazu za energiju/rad, kako bi ga se ravnopravno moglo pribrojiti ostalim članovima funkcionala energije. To znači da se optimizacijski problem s ograničenjem

$$\begin{aligned}&\min \Pi(u_i),\\ &d_{\mathrm{n}} \geq 0\end{aligned} \tag{3.29}$$

može formulirati kao ekvivalentan optimizacijski problem bez ograničenja

$$\min\left\{\Pi(u_i)+\frac{1}{2}\varepsilon\delta^2(u_i)\right\}, \tag{3.30}$$

pri čemu za prodor po definiciji vrijedi $\delta = \min(d_{\mathrm{n}}, 0)$. Kako je vidljivo iz oblika penalizirajućeg člana u izrazu (3.30), veličina ε ima fizikalno značenje kontaktne krutosti, a kontaktnu se silu dobiva kao prvu derivaciju penalizirajućeg člana, odnosno

$$p_{\mathrm{n}} = \varepsilon\delta(u_i). \tag{3.31}$$

Iterativna procedura temeljena na penalty metodi sastoji se u odabiru početne vrijednosti parametra ε i rješenju problema iz (3.30), nakon čega se postupak ponavlja uz kontinuirano povećavanje vrijednosti penalty faktora iz iteracije u iteraciju. Pritom se rješenje dobiveno na kraju svake iteracije koristi kao početna točka za sljedeću iteraciju, a postupak se ponavlja sve dok promjena dvaju uzastopnih rješenja ne postane zadovoljavajuće malena. Posve općenito govoreći, rješenje problema danog izrazom (3.30) uvijek će težiti točnom rješenju, odnosno rješenju problema (3.29), kada $\varepsilon \to \infty$, što posljedično implicira i $\delta \to 0$ [56,60].

Metoda Lagrangeovih multiplikatora nešto je složenija i u njoj se za zadani optimizacijski problem s ograničenjima formulira *Lagrangeovu funkciju* na način da se funkciji cilja svako i-to ograničenje pribraja pomnoženo s dodatnom varijablom λ_i, koja predstavlja Lagrangeov

[9] Pojava prodora δ (odnosno negativne vrijednosti d_{n}) narušava ograničenje $d_{\mathrm{n}} \geq 0$, koje predstavlja kinematički uvjet kompatibilnosti pomaka na kontaktnoj površini.

multiplikator. Na temelju tako definirane formulacije Lagrangeove funkcije, za problem dan izrazom (3.29) može se postaviti ekvivalentan optimizacijski problem

$$\min\{\mathcal{L}(u_i,\lambda)=\Pi(u_i)+\lambda d_{\mathrm{n}}(u_i)\}. \tag{3.32}$$

Pritom Lagrangeov multiplikator u točki u kojoj postoji aktivan kontaktni uvjet odgovara sili reakcije potrebnoj kako bi se poništilo svako narušavanje odgovarajućeg ograničenja, što ujedno znači da ima fizikalno značenje kontaktne sile [56,60]. Lagrangeov se multiplikator također može shvatiti i kao vanjska sila nužna za uspostavljanje uvjeta ravnoteže u stanju kontakta. Rješenje problema izraženoga pomoću Lagrangeove funkcije (3.32) definirano je kao [10]

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}=\frac{\partial\Pi(u_i)}{\partial u_i}+\lambda\frac{\partial d_{\mathrm{n}}(u_i)}{\partial u_i}=0\,, \tag{3.33.a}$$

$$\lambda d_{\mathrm{n}}(u_i)=0\ \ ;\ \ \lambda\le 0\,. \tag{3.33.b}$$

Uvjeti u izrazu (3.33.b) nazivaju se u teoriji optimizacije *Karush-Kuhn-Tuckerovim uvjetima*, koji pružaju okvir za rješavanje problema omeđenih uvjetima nejednakosti. Vidljivo je da su ovi uvjeti za slučaj rješavanja kontaktnih problema ekvivalentni Hertz-Signorini-Moreauovim uvjetima objašnjenima u poglavlju 3.1.1. Optimizacijski se problem primjenom Lagrangeovih multiplikatora može riješiti i transformacijom ograničenja nejednakosti u jednakosti pomoću dopunske varijable s (eng. *slack variable*) [56,61]

$$d_{\mathrm{n}}\ge 0\ \ \rightarrow\ \ d_{\mathrm{n}}-s^2=0\,, \tag{3.34}$$

čime Lagrangeova funkcija postaje

$$\mathcal{L}(u_i,\lambda,s)=\Pi(u_i)+\lambda\left[d_{\mathrm{n}}(u_i)-s^2\right] \tag{3.35}$$

i iz koje se rješenje za λ može dobiti na temelju sustava jednadžbi koji proizlaze iz uvjeta stacionarnosti za sve varijable Lagrangeove funkcije

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}=0\ \ ;\ \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=0\ \ ;\ \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s}=0\,. \tag{3.36}$$

Proširena Lagrangeova metoda u svom načelnom pristupu, kao i penalty metoda, počiva na principu transformacije optimizacijskog problema s ograničenjima u problem bez ograničenja, što se u ovom slučaju postiže uvođenjem koncepta *proširene Lagrangeove funkcije*. Proširena Lagrangeova funkcija istovjetna je Lagrangeovoj funkciji kojoj je pribrojen penalizirajući član i koji tretira narušavanje zadanog ograničenja. Pritom se za potrebe tretiranja ograničenja nejednakosti također može uvesti dopunsku (*slack*) varijablu kako je navedeno u izrazu (3.34)

[10] U literaturi koja se bavi metodama optimizacije najčešće se susreće formulacija u kojoj se ograničenja nejednakosti za optimizacijski problem uzimaju u obliku ≤, a Lagrangeove multiplikatore podrazumijeva se kao pozitivne. To međutim nije ni u kakvom proturječju s ovdje usvojenim pristupom, koji uzima u obzir fiziku problema podrazumijevajući da je razmak d_{n} uvijek pozitivan (tip nejednakosti ≥), a kontaktna sila uvijek tlačna (negativna).

[62,63]. U skladu s izloženim, za problem iz izraza (3.29) može se formulirati ekvivalentan optimizacijski problem minimizacije funkcionala

$$\min\left\{\mathcal{L}_{\mathrm{P}}=\Pi(u_i)+\lambda\left[d_{\mathrm{n}}(u_i)-s^2\right]+\frac{1}{2}\varepsilon\left[d_{\mathrm{n}}(u_i)-s^2\right]^2\right\},\tag{3.37}$$

čije se rješenje dobiva odabirom nekih početnih vrijednosti Lagrangeova multiplikatora i penalizirajućeg faktora i ispitivanjem uvjeta stacionarnosti funkcionala

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{P}}}{\partial u_i}=0.\tag{3.38}$$

U iterativnoj se proceduri vrijednost Lagrangeova multiplikatora iz k-te u (k+1)-vu iteraciju mijenja prema obrascu

$$\lambda^{k+1}=\lambda^k+\varepsilon_k d_{\mathrm{n}}\left(u_i^k\right),\tag{3.39}$$

a penalizirajuća se vrijednost može držati na konstantnoj vrijednosti, ali ju se isto tako do određene maksimalne dopuštene vrijednosti može i mijenjati iz iteracije u iteraciju, primjerice množenjem s konstantnom vrijednošću $c>1$

$$\varepsilon_{k+1}=c\varepsilon_k.\tag{3.40}$$

Važno je naglasiti temeljne razlike te prednosti i nedostatke triju navedenih pristupa. Točnost penalty metode ovisi prvenstveno o vrijednosti penalizirajućeg parametra ε, a nakon konvergencije rješenja dobiveni rezultat uvijek sadrži određen iznos prodiranja jednog tijela u drugo. Kako nije moguće dobiti nultu vrijednost prodora na realnim računalima ograničenih hardverskih mogućnosti, za dobar je rezultat potrebna dovoljno velika vrijednost parametra ε, s obzirom da se s premalom vrijednošću dobivaju rješenja koja sadrže veliku pogrešku. Međutim, ukoliko je vrijednost prevelika, matrica krutosti u konačnoelementnoj formulaciji postaje loše uvjetovana pa je za dobra rješenja potrebno tražiti dobar kompromis između dvaju navedenih aspekata [56,59,64,65]. Jednako tako, točnost je, osim o penalizirajućem parametru, kao i kod ostalih pristupa u velikoj mjeri ovisna i o gustoći mreže te broju inkremenata i broju iteracija unutar inkrementa, a za guste je mreže konvergencija penalty metode vrlo spora [66]. Glavne prednosti penalty metode jesu jednostavnija implementacija u usporedbi s drugim postojećim pristupima te činjenica da se ne povećava dimenzionalnost problema, s obzirom da su pomaci jedine varijable koje se koriste u formulaciji. Broj nepoznanica odgovara broju stupnjeva slobode gibanja, neovisno o broju i vrsti ograničenja (kontaktnih uvjeta). Matrici krutosti promatranoga tijela samo se pribraja *kontaktna matrica krutosti*, koja opisuje doprinos ukupnoj krutosti sustava uslijed interakcije dvaju tijela na kontaktnoj površini.

Metoda Lagrangeovih multiplikatora omogućava točno ispunjavanje ograničenja (nema prodiranja) kroz uvođenje kontaktnih sila u formulaciju kao dodatnih varijabli (Lagrangeovi multiplikatori), što znači da se kontaktne sile ne izračunavaju posredno na temelju pomaka.

To kao najvažniju prednost nad penalty metodom donosi mogućnost dobivanja „potpuno“ točnih rješenja. Dodatne varijable za svako ograničenje, međutim, ujedno znače i povećanje broja nepoznanica, što ovaj pristup čini zahtjevnijim s numeričkog aspekta i što naročito dolazi do izražaja kada se na kontaktnoj površini nalazi velik broj čvorova [56]. Općenito govoreći, metoda Lagrangeovih multiplikatora zahtjevnija je s aspekta procesorskog vremena, ali daje u pravilu bolja i točnija rješenja [67].

Temeljna prednost proširene Lagrangeove metode u usporedbi s dva prethodna pristupa jest ta da daje rezultate vrlo visoke točnosti uz konačne vrijednosti penalizirajuće vrijednosti. Time ova metoda postaje značajno manje osjetljiva na problem slabe uvjetovanosti matrice krutosti u odnosu na penalty metodu, premda u svojoj osnovi ima iste temeljne nedostatke kao i penalty metoda i ovisi o izboru penalizirajućeg parametra ukoliko se njegovu vrijednost drži na zadanoj konstantnoj vrijednosti [59,68].

3.2. Inkrementalno-iterativne procedure rješavanja

3.2.1. Temeljni koncept

U završnim napomenama poglavlja 1.4 već je naglašeno i obrazloženo zašto su kontaktni problemi fizikalno i matematički složeniji od konvencionalnih problema strukturne mehanike. Korisno je tu činjenicu nanovo istaći i obrazložiti u kontekstu primjenjivanih numeričkih metoda, čiji su kontaktni algoritmi također složeniji od numeričkih algoritama korištenih za rješavanje standardnih problema. Takvi algoritmi spadaju u klasu iterativnih i iterativno-inkrementalnih algoritama. Za kontaktne je probleme karakteristično sljedeće:

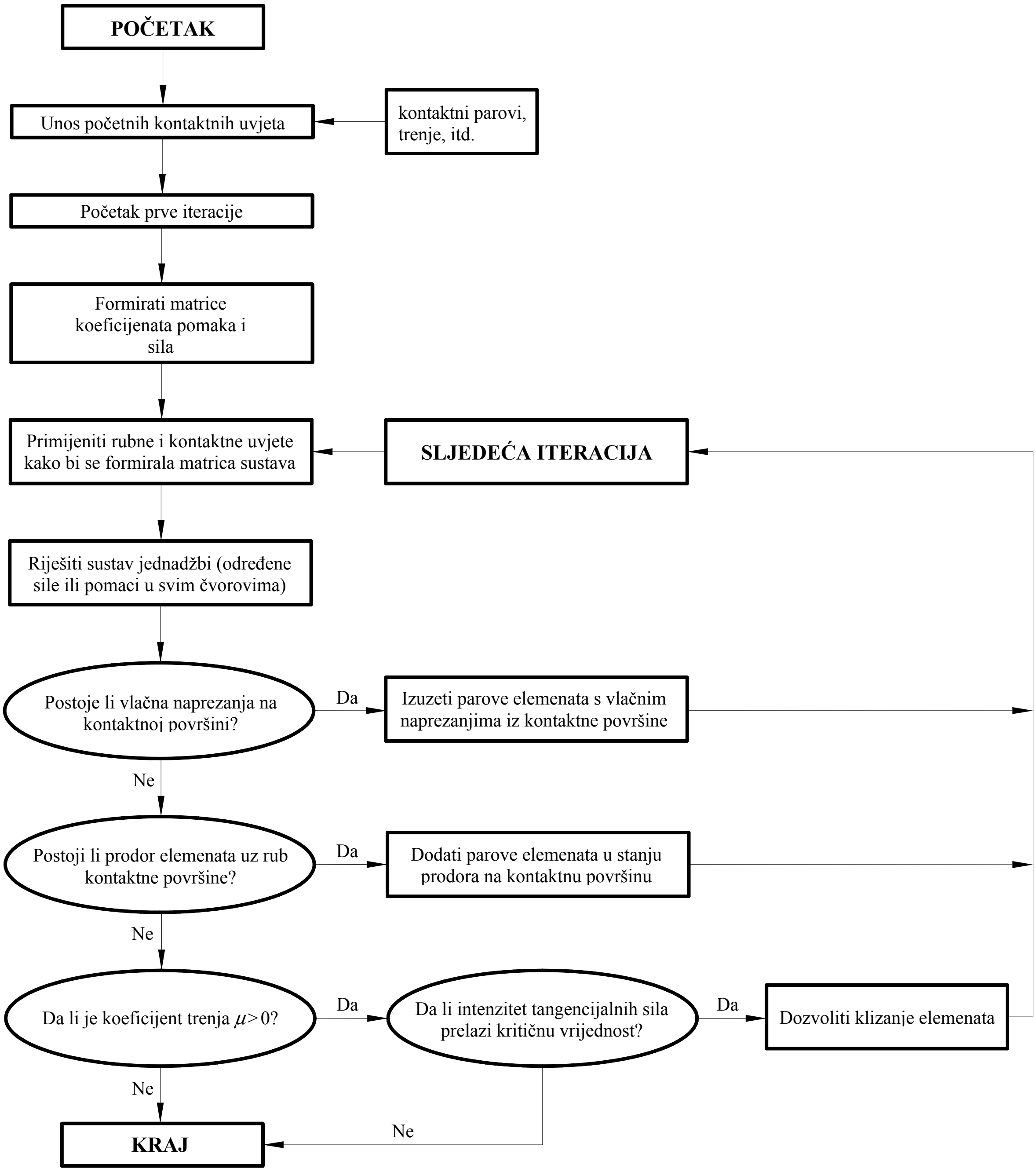
- ✓ Dimenzije kontaktne površine u većini slučajeva nisu unaprijed poznate te ih se u prvom koraku može uzeti samo s nekim pretpostavljenim početnim vrijednostima.
- ✓ I u slučajevima kada se problem rješava u okviru linearne teorije elastičnosti, u većini slučajeva promjena dimenzija kontaktne površine nije u linearnoj ovisnosti o opterećenju.
- ✓ Kada se u obzir uzima i trenje, ponašanje može ovisiti o prethodnim ciklusima opterećivanja i rasterećivanja, što znači da opterećenje na numerički model treba primijeniti u potrebnom broju dovoljno malih koraka (inkremenata), sve dok se ne dosegne vrijednost zadanog opterećenja.

Primjenom numeričkih metoda promatrano se tijelo, odnosno mehanički kontinuum, diskretizira na određeni broj podkontinuuma koje se uopćeno naziva elementima. Elementi su preko čvorova međusobno spojeni u mrežu elemenata, koja aproksimira geometriju zadanog tijela. Uzimajući u obzir navedene aspekte karakteristične za kontaktne probleme, numerička procedura rješavanja mora biti iterativna, a kada se razmatra i trenje iterativno-inkrementalna. Da bi rješenje kontaktnog problema bilo prihvatljivo, ono mora zadovoljavati određene fizikalne kriterije, a rješenje je kroz potreban broj iteracija potrebno podešavati sve dok ti kriteriji ne budu zadovoljeni. Na kraju svake iteracije potrebno je na elementima unutar te neposredno uz kontaktnu površinu napraviti sljedeće provjere:

1. *Provjera međusobnog preklapanja*, tj. prodiranja, parova elemenata uz sam rub kontaktne površine. Ukoliko se javlja preklapanje, to znači da je kontaktna površina za dano opterećenje premalena te ju za sljedeću iteraciju treba proširiti na te parove elemenata. S druge strane, provjera prodiranja parova elemenata koji se već nalaze unutar kontaktne površine ovisit će o konkretnoj metodi implementacije kontaktnih uvjeta. Takva provjera nije potrebna ukoliko su na primjer u algoritam na ispravan način uvedeni kontaktni uvjeti primjenom metode Lagrangeovih multiplikatora.
2. *Provjera vlačnih naprezanja*. Sve je kontaktne parove potrebno kontrolirati na pojavu vlačnih naprezanja. Ukoliko su takva naprezanja otkrivena, to znači da je kontaktna površina za dano opterećenje prevelika te da takve parove elemenata u sljedećoj iteraciji treba izuzeti iz kontaktne površine. Može se često dogoditi da se normalno naprezanje mijenja iz tlačnog u vlačno unutar elementa. U takvom je slučaju, uz uvjet da je element dovoljno malen, pojavu vlačnih naprezanja najbolje provjeriti na temelju ukupne rezultante sila/naprezanja po čitavom elementu.
3. *Provjera klizanja elemenata*. U problemima s trenjem potrebno je utvrditi da li omjer tangencijalnih i normalnih površinskih sila prelazi vrijednost koeficijenta trenja μ. Ukoliko je to slučaj, potrebno je dozvoliti međusobno klizanje parova elemenata, a tangencijalne površinske sile poprimaju, u skladu s Coulombovim zakonom trenja, vrijednost koja ovisi o intenzitetu normalnih kontaktnih pritisaka i koeficijentu trenja. Smjer djelovanja tangencijalne površinske sile u stanju klizanja uvijek je suprotan smjeru klizanja.

Postupak iteriranja prekida se tek kada su svi navedeni kriteriji zadovoljeni, odnosno kada: nema (nedopušteno velikog) preklapanja, nema vlačnih naprezanja, provjeren je odnos tangencijalnih sila prema sili trenja. Konačno rješenje kontaktnog problema obično je određeno dostizanjem maksimalne zadane vrijednosti opterećenja ili u nekim slučajevima najveće moguće kontaktne površine, a minimalni uvjet za prihvaćanje rješenja kontaktnog problema jest zadovoljenje kontaktnih uvjeta (ravnoteža sila i kompatibilnost pomaka).

Okvirni prikaz temeljnog koncepta opisanog postupka u obliku dijagrama toka iterativne procedure kontaktnog algoritma prikazan je na slici 12. Opisani se iterativni postupak ponavlja za svaki inkrement opterećenja, ukoliko je problem potrebno rješavati i inkrementalno.



Sl. 12. Osnovni koncept dijagrama toka iterativnih numeričkih procedura za rješavanje kontaktnih problema; prikazani se postupak ponavlja za svaki inkrement opterećenja

Premda u praksi postoji mnoštvo varijacija i specifičnosti u konkretnim pristupima, prikazani je koncept u svojoj temeljnoj strukturi karakterističan za sve pristupe u rješavanju kontaktnih problema, kako u metodi konačnih elemenata, tako i u metodi rubnih elemenata.

3.2.2. Metode definiranja opterećenja

Način uvođenja opterećenja u numerički model često je od ključne važnosti u analizi kontaktnih problema. Praksa pokazuje kako kod problema s trenjem razlike u načinu primjene opterećenja u pravilu dovode do različitih rješenja [2,5]. Metode primjene opterećenja mogu se podijeliti u tri osnovne skupine, kako je opisano u nastavku [2].

Metoda ukupnog (totalnog) opterećenja: Opterećenje se u punom iznosu uvodi u model, odnosno u jednom „inkrementu“ unutar kojega se iteracije ponavljaju sve dok svi potrebni uvjeti nisu ispunjeni. Ovom se metodom na zadovoljavajući način mogu riješiti linearni problemi, kod kojih je kontaktna površina unaprijed poznata ili ne ovisi o opterećenju, kao što je slučaj na primjer kod prizmatičnog tijela pritisnutog u ravnu podlogu.

Pseudo-inkrementalna metoda: U ovoj se metodi niz totalnih opterećenja primjenjuje u rastućem redoslijedu na početni problem kojemu su nakon svakog opterećenja samo zadržani kontaktni uvjeti od prethodnog opterećenja. Na primjer, pretpostavi li se da je na model naneseno opterećenje P^k, za koje je metodom ukupnog opterećivanja pronađeno rješenje, odnosno kontaktni uvjeti, tada se tako dobivene kontaktne uvjete zadržava kao početne uvjete za sljedeće opterećenje

$$P^{k+1} = P^k + \Delta P^k \,, \tag{3.41}$$

za koje se istim načinom pronalaze novi kontaktni uvjeti. Prirast opterećenja ΔP^k može se, na primjer, odrediti dijeljenjem maksimalnog (zadanog) opterećenja $P_{\max}$ na željeni broj jednakih koraka, ali se može odrediti i skaliranjem na željenu vrijednost ukoliko se neki određeni čvor ili element želi dovesti u kontakt. Iznos inkrementa je u drugom navedenom slučaju potrebno iterativno podešavati sve dok se ne zadovolje uvjeti prianjanja ili klizanja.

Primjenom ove metode zadržava se dio informacija o načinu opterećivanja, međutim, primjenjiv je isključivo za kontakte čvor-na-čvor u zoni prianjanja, a na granicama zone prianjanja i klizanja javljaju se fizikalno nerealne skokovite promjene tangencijalnih površinskih sila.

Inkrementalna metoda: Razlika u odnosu na pseudo-inkrementalnu metodu sadržana je u tome da se u svakom koraku koriste kontaktni uvjeti i geometrija (pomaci) deformirana u prethodnom koraku. To znači da je u procesu opterećivanja za formulaciju svakog sljedećeg koraka potrebna samo veličina ΔP^k, umjesto čitavog iznosa P^k, pa se takvim pristupom u potpunosti zadržavaju sve informacije o procesu opterećivanja i mijenjanja kontaktnih uvjeta. Ovakav je pristup pogodan za analizu kontaktnih problema tipa čvor-na-čvor, kao i čvor-na-element, a jednako tako ne javljaju se niti netočnosti u raspodjeli tangencijalnih površinskih sila karakteristične za pseudo-inkrementalni pristup.

3.3. Metoda konačnih elemenata

3.3.1. Temeljna razmatranja

Stvarni problemi mehanike konstrukcija se često opisuju diferencijalnim i integralnim jednadžbama koje su analitički nerješive. Numeričkim se pristupom dobivaju aproksimativni rezultati kao rješenje sustava algebarskih jednadžbi koje imaju egzaktno rješenje. Metoda konačnih elemenata (MKE) široko je primjenjiva numerička metoda kojom se probleme mehanike kontinuuma rješava diskretizacijom čitave domene unutar koje se želi pronaći rješenje. Domena se dijeli na konačan broj poddomena koje se naziva konačnim elementima i koji su preko čvorova povezani u mrežu konačnih elemenata. Na takvoj se mreži primjenom odgovarajućih jednadžbi dovode u vezu sile i/ili pomaci u polju konačnog elementa sa silama i/ili pomacima u čvorovima konačnog elementa. Takav postupak daje *osnovnu jednadžbu konačnog elementa*, a združivanjem se osnovnih jednadžbi svih konačnih elemenata dobiva globalna jednadžba, iz koje je poznata zavisnost sila i pomaka na čitavoj konstrukciji.

Unutar elemenata sve se nepoznanice i geometriju promatra u lokalnom koordinatnom sustavu i određuje ih se uz pomoć interpolacijskih funkcija na temelju njihovih vrijednosti u čvorovima. Ukoliko se interpolaciju varijabli (pomaka, sila, ...) izvodi pomoću istih interpolacijskih funkcija (funkcija oblika) kao i interpolaciju geometrije, odnosno koordinata, tada se govori o *izoparametarskom konačnom elementu*, što će se u narednim razmatranjima podrazumijevati. Formulacija jednadžbi konačnih elemenata najčešće se izvodi primjenom varijacijskih principa, a u okviru metode pomaka to su metoda virtualnih pomaka (radova) i princip minimizacije ukupne potencijalne energije [69-71].

Veza koordinata x_i, pomaka u_i i sila t_i u točkama polja konačnog elementa s njihovim vrijednostima x_i^m, u_i^m i t_i^m u čvorovima elementa ξ^m, za izoparametarski se konačni element pomoću interpolacijskih funkcija formira na temelju sljedećih izraza:

$$x_i = N^m x_i^m \;\; ; \;\; u_i = N^m u_i^m \;\; ; \;\; t_i = N^m t_i^m \,. \tag{3.42}$$

Temeljno je svojstvo interpolacijskih funkcija da poprimaju jediničnu vrijednost u pripadnom čvoru i nultu vrijednost u svim ostalim čvorovima elementa, odnosno mora vrijediti

$$N^m\left(\xi^n\right) = \delta_{mn} \,, \tag{3.43}$$

gdje je δ_{mn} *jedinični* ili *Kroneckerov tenzor* (*Kronecker delta*).

3.3.2. Osnovna jednadžba konačnog elementa i jednadžba sustava

Osnovnu se jednadžbu konačnog elementa može izvesti primjenom principa virtualnih radova, odnosno temeljem jednakosti virtualnog rada unutarnjih i vanjskih sila. U skladu s notacijom iz izraza (3.28), za izdvojeni konačni element virtualni rad unutarnjih sila bit će jednak virtualnom radu vanjskih sila, odnosno volumenskih, površinskih i koncentriranih sila, što se može zapisati u obliku:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} \delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{\mathrm{t}}} t_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \delta u_i^m , \tag{3.44}$$

pri čemu se podrazumijeva $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Omega(\eta_i)$ i $\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}\Gamma(\eta_i)$.

Uzimajući u obzir da je tenzor malih deformacija

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{3.45}$$

te da zbog simetrije tenzora naprezanja $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ i simetrije tenzora elastičnosti C_{ijkl} s obzirom na indekse k-l vrijedi [71,72]

$$\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} , \tag{3.46.a}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} , \tag{3.46.b}$$

lijeva se strana izraza (3.44), odnosno virtualni rad unutrašnjih sila, može napisati kao

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \mathrm{d}\Omega . \tag{3.47}$$

Ukoliko se u skladu s izrazom (3.42) u izraz (3.44) uvede interpolacija pomaka i virtualnih pomaka te ukoliko se ispred integrala izluče njihove čvorne vrijednosti, izraz (3.44) dobiva oblik

$$u_j^n \delta u_i^m \int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} \mathrm{d}\Omega = \delta u_i^m \left(\int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} N^m \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{\mathrm{t}}} t_i N^m \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \right). \tag{3.48}$$

Nakon što se pokrate virtualni pomaci δu_i^m s obje strane jednadžbe (3.48), dobiva se

$$k_{ij}^{mn} u_j^n = f_i^m , \tag{3.49}$$

a dobiveni izraz predstavlja osnovnu jednadžbu konačnog elementa, gdje je

$$k_{ij}^{mn} = \int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} \mathrm{d}\Omega \tag{3.50}$$

matrica krutosti konačnog elementa, koju se u okviru linearne teorije naziva i elastičnom ili linearnom matricom krutosti. Matrica krutosti kvadratna je matrica koja daje vezu između vektora čvornih sila i vektora čvornih pomaka konačnog elementa, a sadrži veličine koje proizlaze iz geometrije elementa i elastičnih konstanti materijala. Usporedbom izraza (3.49) i (3.48) proizlazi da je vektor čvornih sila konačnog elementa

$$f_i^m = \int_{\Omega} f_{Vi} N^m \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i N^m \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \,, \tag{3.51}$$

odakle je vidljivo da vektor čvornih sila u svakom čvoru objedinjuje volumenske, površinske i koncentrirane sile.

Kako je već spomenuto, interpolacijske su funkcije definirane u lokalnom koordinatnom sustavu konačnog elementa. Da bi se moglo primijeniti izraze (3.48)-(3.51), izražene pomoću globalnih koordinata, i formirati globalnu jednadžbu čitavog sustava (konstrukcije), potrebno je transformirati derivacije interpolacijskih funkcija te integrale matrice krutosti i komponenti sila iz lokalnog koordinatnog sustava u globalni koordinatni sustav. U tu je svrhu potrebno poznavati funkcijsku zavisnost lokalnih i globalnih koordinata izraženu u obliku Jakobijeve matrice. Za derivacije interpolacijskih funkcija mora vrijediti

$$\frac{\partial N^m}{\partial x_i} = \frac{\partial N^m}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}, \tag{3.52}$$

dok za domenu integracije i njen rub mora vrijediti

$$\mathrm{d}\Omega(x_i) = \left|J_{ij}\right| \mathrm{d}\Omega(\eta_i) = \left|\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}\right| \mathrm{d}\Omega(\eta_i), \tag{3.53.a}$$

$$\mathrm{d}\Gamma(x_i) = \left|J_{ij}\right| \mathrm{d}\Gamma(\eta_i) = \left|\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}\right| \mathrm{d}\Gamma(\eta_i). \tag{3.53.b}$$

Jednadžbu sustava, koja daje vezu između globalnog vektora čvornih sila s vektorom globalnih komponenti čvornih pomaka, dobiva se združivanjem matrica krutosti pojedinih elemenata na način da se zbroje odgovarajući članovi matrica krutosti onih konačnih elemenata koji pripadaju zajedničkom čvoru. Združivanjem matrica krutosti svih elemenata dobiva se singularna matrica krutosti sustava

$$K_{ij}^{mn} = \sum_e k_{ij}^{mn}, \tag{3.54}$$

koja nema jedinstveno rješenje prije nego li se definiraju rubni uvjeti, bez kojih se struktura može gibati kao kruto tijelo. Tek definiranjem rubnih uvjeta sustav jednadžbi ima jedinstveno rješenje, čime se formira takav sustav čiji broj jednadžbi odgovara broju nepoznanica, a rubni su uvjeti definirani u vidu poznatih sila i pomaka. Općenito govoreći, u čvorovima u kojima su poznati pomaci potrebno je pronaći sile, a u čvorovima u kojima su zadane sile potrebno je pronaći pomake. Jednadžba sustava može se napisati u obliku

$$K_{ij}^{mn} u_j^n = F_i^m, \tag{3.55}$$

gdje je vektor čvornih sila čitave strukture

$$F_i^m = \sum_e f_i^m . \tag{3.56}$$

3.3.3. Primjena MKE na kontaktne probleme

Kako bi se primjenom MKE mogao temeljem principa virtualnih radova riješiti kontaktni problem, potrebno je diskretizirati jednadžbu (3.28) na način posve analogan postupku u izvodu osnovne jednadžbe konačnog elementa. Diskretizacija domene provodi se temeljem činjenice da jednadžba (3.28), koja vrijedi za čitavu domenu, mora vrijediti i za svaki e-ti konačni element promatran izdvojeno od svoje okoline. Globalna formulacija dana izrazom (3.28) mora, stoga, biti jednaka zbroju jednadžbi po svim elementima. Jednadžbu ravnoteže virtualnih radova za čitavo tijelo potrebno je izraziti kao sumu odgovarajućih integracija po domenama i rubovima domena pojedinih konačnih elemenata:

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega^e = \sum_e \left(\int_{\Omega^e} f_{\mathrm{V}i} \delta u_i \mathrm{d}\Omega^e + \int_{\Gamma_t^e} t_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma^e + \int_{\Gamma_c^e} p_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma^e + \sum_m P_i^m \delta u_i^m \right), \tag{3.57}$$

gdje se radi pogodnosti može podrazumijevati da točke m, u kojima djeluju koncentrirane sile, ujedno označavaju i čvorove e-tog konačnog elementa.

Temeljem razmatranja koja su rezultirala izrazima (3.48) i (3.49) izraz za ravnotežu virtualnih radova (3.43) u diskretiziranoj formulaciji ima oblik

$$u_j^n \sum_e \int_{\Omega^e} C_{ijkl} \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} \mathrm{d}\Omega^e = \sum_e \left(\int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} N^m \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i N^m \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_c} p_i N^m \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \right) \tag{3.58}$$

te je ovako dobiven izraz analogan jednadžbi sustava. Da bi se u izraz (3.58) implementiralo kontaktne uvjete primjenom penalty metode, kontaktne je sile u sustav jednadžbi potrebno uvesti kroz matricu geometrijskih ograničenja pomaka D_{ij}, koja objedinjuje kontaktne uvjete za pojedine čvorove u kojima je došlo do prekoračenja kontaktnih uvjeta i koja za pripadni stupanj slobode gibanja sadrži komponente jediničnog vektora normale [64,65]. Matrica geometrijskih ograničenja sadrži stoga uvjete izražene u obliku izraza (3.1.d). Uvođenjem penalty izraza iz (3.31) za kontaktne sile, izraz (3.58) se izdvajanjem doprinosa kontaktnih sila izvan zagrade može napisati u obliku

$$u_j^n \sum_e \int_{\Omega^e} C_{ijkl} \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} \mathrm{d}\Omega^e = \sum_e \left(\int_{\Omega} f_{\mathrm{V}i} N^m \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i N^m \mathrm{d}\Gamma + \sum_m P_i^m \right) + \sum_e \int_{\Gamma_c} \varepsilon_i \delta_i N^m \mathrm{d}\Gamma , \tag{3.59}$$

Dobiveni se izraz primjenom relacije (3.1.d) za prodor δ u sažetijem zapisu može prikazati kao [65]

$$\left(K_{ij}^{mn} + \varepsilon D_{ik} D_{kj} \right) u_j^n = F_i^m + \varepsilon D_{ij} d_{0j} , \tag{3.60}$$

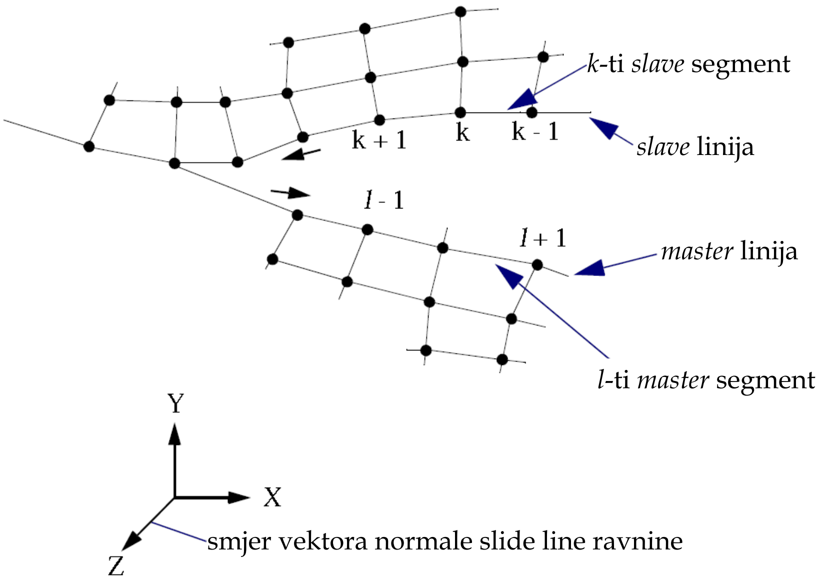
gdje član koji se pribraja matrici krutosti predstavlja *kontaktnu matricu krutosti*, koja time modificira ukupnu krutost sustava, a drugi član na desnoj strani predstavlja vektor čvornih kontaktnih opterećenja.

3.3.4. Softver Femap i modeliranje kontaktnog problema

Svi numerički modeli analizirani u ovome radu izrađeni su u softverskom paketu Femap 10.0 namijenjenom numeričkoj analizi metodom konačnih elemenata, unutar kojega se koristi rješavač NX Nastran. Iz tog je razloga potrebno pobliže opisati princip definiranja problema i implementirane matematičke formulacije na temelju koje softver dolazi do rješenja. Kontakti su u svim provedenim analizama definirani posebnim elementom tipa *slide line*. Slide line element predstavlja u stvari liniju kontaktnih elemenata za koje se očekuje i/ili dozvoljava da dođu u međusobni kontakt. Postavke samog softvera zahtijevaju da svaki slide line element bude definiran u *xy* ravnini, bilo u globalnom bilo u lokalnom koordinatnom sustavu [73-75]. Osim što dozvoljavaju modeliranje klasičnog utiskivanja tijela, slide line elementi omogućavaju i klizanje tijela duž slide line linije, osiguravajući pritom i mogućnost velikih pomaka (klizanja) duž slide line linije. To ih bitno razlikuje od starijeg pristupa u kojemu se upotrebljavaju tzv. zazorni elementi (eng. *gap elements*), koji su ograničavajući u smislu da dozvoljavaju kontakt isključivo po principu čvor-na-čvor i ne pružaju mogućnost modeliranja velikih pomaka duž kontaktne linije/površine [74].

Za formiranje slide line elementa, prikazano na slici 13, potrebno je definirati tzv. *master* i *slave* čvorove[11], kojih u jednom slide line elementu može biti proizvoljan broj, a unutar jednog numeričkog modela može se definirati proizvoljan broj slide line elemenata. Prilikom rješavanja kontaktnog problema, simulaciju je moguće provoditi za slučaj tzv. simetričnog ili nesimetričnog prodiranja, a standardna je postavka nesimetrično prodiranje, pri kojemu se provjere vrše samo za prodiranje slave čvorova i segmenata preko master linije. Za slučaj simetričnog prodiranja provjere za vrše za oba skupa čvorova i segmenata pa je samim time svejedno na kojem se tijelu definira skup master, a na kojem skup slave čvorova. Analiza sa simetričnim uvjetom prodiranja je točnija, međutim može biti i do 30% vremenski zahtjevnija od analize s nesimetričnim prodiranjem [74].

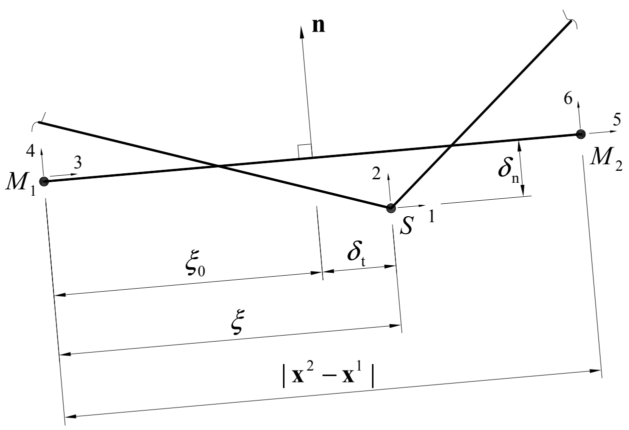
[11] U engleskoj se literaturi vrlo često za nepomično tijelo (master) susreće termin *target*, a za pomično tijelo (slave), odnosno tijelo na koje djeluju vanjske sile koje uzrokuju pojavu kontaktnih pritisaka, termin *contactor*.



Sl. 13. Definiranje slide line elementa; strelice duž slave i master linije naznačuju smjer i redoslijed kojim se definiraju slave i master čvorovi [73]

Da bi model bio dobro postavljen slave i master čvorove potrebno je definirati u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, kako bi vektori normale svakog segmenta na slave i master liniji (gledano u ravnini *xy*) bili usmjereni prema tijelu s kojim trebaju doći u kontakt. Kada normale na kontaktne linije/segmente ne bi bile pravilno usmjerene, algoritam bi početne zazore pogrešno protumačio kao preklapanje geometrije [74].

Kontakt se određuje između slave čvorova i master linije, a slave čvorovi ograničeni su uvjetom klizanja duž master linije, na kojoj moraju ostati sve dok se na kontaktnoj površini u promatranom čvoru ne jave vlačna naprezanja. Prilikom detektiranja kontakta između slave čvora i master segmenta, automatski se stvara tročvorni slide line element [74], prikazan na slici 14.



Sl. 14. Tročvorni slide line element: ξ, ξ_0 – trenutna i prethodna prirodna koordinata, δ_n – prodor slave čvora u master segment, δ_t – klizanje slave čvora po master segmentu

U sljedećim će razmatranjima biti izložena formulacija slide line elementa prema dostupnom opisu njegove implementacije, koju je u literaturi [74] dao Allahabadi. Tročvorni slide line element čine slave čvor S te prvi i drugi master čvorovi M_1 i M_2 promatranog master segmenta. Svaki od tih čvorova ima po dva stupnja slobode gibanja (na slici 14 naznačeni sa po dvije male strelice), jedan u smjeru normale master segmenta (**n**) i drugi u smjeru njegove tangente (**t**), što daje ukupno šest stupnjeva slobode gibanja za jedan tročvorni slide line element.

Tangentni smjer određen je linijom koja spaja prvi i drugi master čvor pa se vektor tangente može odrediti na temelju izraza

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1}{\left|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\right|} = \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1}{L}, \tag{3.61}$$

gdje je $L = \left|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\right|$ duljina master segmenta, uz

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{X}^1 + \mathbf{u}^1 \;\; ; \;\; \mathbf{x}^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{u}^2, \tag{3.62}$$

gdje su $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ vektori trenutnih položaja master čvorova 1 i 2, $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ su njihovi referentni (prethodni) položaji, a $\mathbf{u}^1$ i $\mathbf{u}^2$ su trenutni pomaci u odnosu na referentne položaje. Prirodna koordinata ξ određena je trenutnom projekcijom vektora udaljenosti slave čvora S od master čvora M_1 na master segment, što se može izraziti kao

$$\xi = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{S}} - \mathbf{x}^1}{\left|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\right|} \cdot \mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{S}} - \mathbf{x}^1}{L} \cdot \mathbf{t}, \tag{3.63}$$

gdje je položaj čvora S definiran analogno izrazu (3.62) kao

$$\mathbf{x}^{\mathrm{S}} = \mathbf{X}^{\mathrm{S}} + \mathbf{u}^{\mathrm{S}}. \tag{3.64}$$

U ovakvoj formulaciji problema kontakt se javlja kada je u geometriji slide line elementa na nekom mjestu zabilježena negativna vrijednost prodora δ_{n}, koji se može odrediti kao projekcija vektora udaljenosti čvora S i M_1 na vektor normale master segmenta, odnosno

$$\delta_{\mathrm{n}} = \left(\mathbf{x}^{\mathrm{S}} - \mathbf{x}^1\right) \cdot \mathbf{n}, \tag{3.65}$$

pri čemu je položaj prodora na master segmentu definiran izrazom (3.63).

Algoritam programa Nastran koristi penalty metodu za nametanje kontaktnog uvjeta kompatibilnosti pomaka. Ograničenje prodora čvora S u master segment primjenom penalty metode obuhvaćeno je penalizirajućom funkcijom, koja modificira ukupnu potencijalnu energiju. Takva modifikacija potencijalne energije za normalni kontakt dana je izrazom [74]:

$$\pi_{\mathrm{n}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{n}}}{2} \delta_{\mathrm{n}}^2, \tag{3.66}$$

gdje je ε_n penalizirajuća vrijednost. Kako je već i objašnjeno u poglavlju 3.1.3, rješenje problema kontaktnih uvjeta dobiva se minimizacijom modificirane potencijalne energije kada $\varepsilon_n \to \infty$, a penalizirajuća je vrijednost veličina kojom se korigira nedopušteni prodor na način da njen umnožak s vrijednošću prodora daje silu koju se pribraja površinskim silama kada se taj prodor "poništi". Vidljivo je, prema tome, da izraz (3.66) predstavlja ujedno i rad dodatne (rezidualne) sile na pomaku δ_n.

Vektor rezidualne kontaktne sile $\mathbf{p}_\delta$ dobiva se općenito prvom varijacijom modificirane potencijalne energije, a kontaktna se matrica krutosti $\mathbf{K}_k$ dobiva njenom drugom varijacijom, pri čemu se matrica $\mathbf{K}_k$ također naziva i *konzistentno lineariziranom matricom krutosti*. Za normalni kontakt te su veličine za program Nastran određene sljedećim izrazima [74,75]:

$$\mathbf{p}_{\delta n} = -\varepsilon_n \delta_n \mathbf{N}_S , \tag{3.67.a}$$

$$\mathbf{K}_{k,n} = \varepsilon_n \left[\mathbf{N}_S \mathbf{N}_S^T - \frac{\delta_n}{L} \left(\mathbf{T}_S \mathbf{N}^T + \mathbf{N} \mathbf{T}_S^T + \frac{\delta_n}{L} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \right) \right], \tag{3.67.b}$$

gdje su $\mathbf{N}_S$ i $\mathbf{T}_S$ vektori koji sadrže odgovarajuće pomake na svih šest stupnjeva slobode gibanja za slučaj jediničnoga pomaka u normalnom i tangencijalnom smjeru u slave čvoru *S*, a $\mathbf{N}$ sadrži pomake na stupnjevima slobode master segmenta uslijed jediničnoga pomaka u smjeru normale u master čvoru M_2. Za navedene vektore, u skladu s redoslijedom stupnjeva slobode gibanja naznačenih na slici 14, vrijedi [74]:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_S^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -(1-\xi) & 0 & -\xi \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{T}_S^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(1-\xi) & 0 & -\xi & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{t}, \\ \mathbf{N}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Za kontaktni problem s trenjem, za slučaj kada se promatra uvjete prianjanja slave čvora na master segmentu, modifikacija potencijala posve je analogna izrazu (3.66) i glasi

$$\pi_t = \frac{\varepsilon_t}{2} \delta_t^2 , \tag{3.69}$$

gdje je ε_t odgovarajuća penalizirajuća vrijednost. Vektor rezidualne kontaktne sile i kontaktna matrica krutosti koji su implementirani u programu Nastran u ovom su slučaju [74]:

$$\mathbf{p}_{\delta t} = -\varepsilon_t \delta_t \left(\mathbf{T}_S + \frac{\delta_n}{L} \mathbf{N} \right), \tag{3.70.a}$$

$$\mathbf{K}_{k,t} = \varepsilon_t \left[\mathrm{T}_S \mathbf{T}_S^T - \frac{\delta_n}{L} \left(\mathbf{T}_S \mathbf{N}^T + \mathbf{N} \mathbf{T}_S^T + \frac{\delta_n}{L} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \right) + \frac{\delta_t}{L} \left(\mathbf{N}_S \mathbf{N}^T + \mathbf{N} \mathbf{N}_S^T \right) \right], \tag{3.70.b}$$

gdje također vrijede izrazi iz (3.68).

U slučaju klizanja s trenjem postoji realni tangencijalni pomak u_t koji nije tek narušenje uvjeta prianjanja pa se može ustvrditi odnos $u_t \equiv \delta_t$. U skladu s Coulombovim zakonom trenja određenog koeficijentom trenja μ, sila trenja suprotna je smjeru klizanja i konstantna je po svojoj vrijednosti te ju se na jednostavan način može izraziti kao

$$F_{\mathrm{T}} = -\operatorname{sgn}(u_{\mathrm{t}})\mu\varepsilon_{\mathrm{n}}\delta_{\mathrm{n}}\,. \tag{3.71}$$

Izrazi za rezidualnu silu i kontaktnu matricu krutosti imaju u ovom slučaju sljedeći oblik [74]:

$$\mathbf{p}_{\delta\mathrm{t}} = \operatorname{sgn}(u_{\mathrm{t}})\mu\varepsilon_{\mathrm{n}}\delta_{\mathrm{n}}\left(\mathbf{T}_{\mathrm{S}} + \frac{\delta_{\mathrm{n}}}{L}\mathbf{N}\right), \tag{3.72.a}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{k,t}} = -\operatorname{sgn}(u_{\mathrm{t}})\mu\varepsilon_{\mathrm{n}}\left[\mathbf{T}_{\mathrm{S}}\mathbf{N}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} + \frac{\delta_{\mathrm{n}}}{L}\mathbf{N}\mathbf{N}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} + \frac{\delta_{\mathrm{n}}}{L}\left(\mathbf{N}_{\mathrm{S}}\mathbf{N}^{\mathrm{T}} + \mathbf{N}\mathbf{N}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\right)\right]. \tag{3.72.b}$$

3.4. Metoda rubnih elemenata

Metoda rubnih elemenata (MRE) numerička je metoda kojom se probleme mehanike kontinuuma rješava diskretizacijom ruba domene unutar koje se želi pronaći rješenje, odnosno zamjenom ruba domene integracije s potrebnim brojem diskretnih segmenata koje se naziva rubnim elementima. Ovakav koncept rješavanja metodu rubnih elemenata značajno razlikuje od puno češće primjenjivane metode konačnih elemenata (MKE), a njenom se primjenom značajno smanjuje broj jednadžbi koje je potrebno riješiti kako bi se došlo do konačnog rješenja, ali pri čemu je matrica sustava u pravilu popunjena koeficijentima različitima od nule. Također, implementacija MRE zahtijeva složeniju matematičku formulaciju problema, u kojoj je diferencijalne jednadžbe koje opisuju zadani problem potrebno analitički transformirati u integralnu jednadžbu na rubu domene, koju se naziva i *rubna integralna jednadžba*. Pritom se rubnu integralnu jednadžbu u svrhu numeričkog rješenja zadanog problema diskretizira, čime se dobiva sustav linearnih jednadžbi čije rješenje ujedno predstavlja i aproksimativno rješenje polaznog problema. Tako dobiveno rješenje rubne integralne jednadžbe kompletira rubne uvjete, na temelju kojih se za sve varijable zadanoga problema može pronaći rješenje u bilo kojoj točki unutar domene.

3.4.1. Osnovni matematički pojmovi

Integralne jednadžbe: Jednadžba u kojoj se nepoznata funkcija $y(t)$ nalazi pod znakom integrala naziva se integralna jednadžba. Nepoznata se funkcija može, osim toga, u integralnoj jednadžbi nalaziti i izvan integrala, a granice integracije mogu biti konstantne ili promjenjive. Konstantne su granice integracije svojstvene primjerice *Fredholmovim jednadžbama*, a promjenjive *Volterrinim jednadžbama*. U slučaju kada se funkcija $y(t)$ izvan integrala nalazi u prvom stupnju, tada se integralna jednadžba naziva linearnom.

Integralna jednadžba u kojoj se nepoznata funkcija $y(t)$ nalazi samo pod integralom, oblika

$$\int_a^b K(x,t)y(t)\mathrm{d}t = f(x), \tag{3.73}$$

gdje su $K(x,t)$ i $f(x)$ poznate funkcije, naziva se *Fredholmovom integralnom jednadžbom prve vrste*, a kada je $f(x) = 0$, jednadžba se naziva homogenom. Jednadžba oblika

$$y(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)\mathrm{d}t = f(x), \tag{3.74}$$

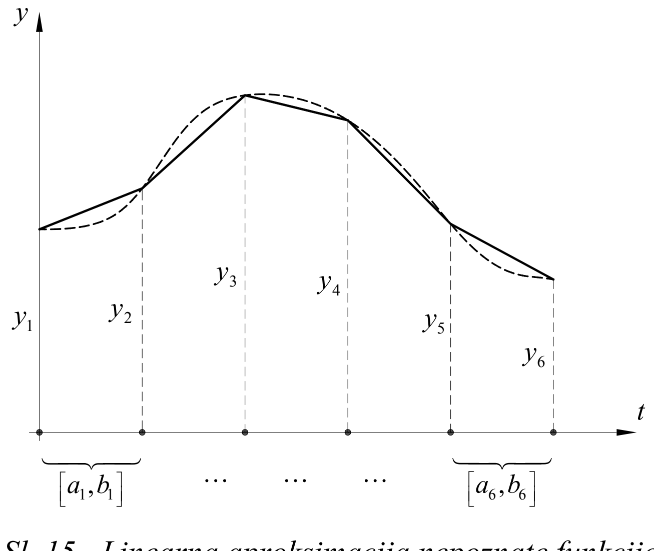
u kojoj se nepoznata funkcija javlja i izvan znaka integrala naziva se *Fredholmovom integralnom jednadžbom druge vrste*, a najopćenitija linearna integralna jednadžba oblika

$$g(x)y(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)\mathrm{d}t = f(x), \tag{3.75}$$

gdje je $g(x)$ poznata funkcija, naziva se *integralnom jednadžbom treće vrste*, te je ona ujedno i poopćenje jednadžbi danih izrazima (3.73) i (3.74). Pritom se funkcija $K(x, t)$ pod znakom integrala u izrazima (3.73), (3.74) i (3.75) naziva *jezgrom integralne jednadžbe*.

Temeljno je svojstvo integralnih jednadžbi da, za razliku od diferencijalnih jednadžbi, ne povezuju vrijednosti nepoznate funkcije isključivo u susjednim točkama, već obuhvaćaju čitavu domenu integracije, uključujući i rub domene, te su u takvoj formulaciji rubni uvjeti (ili početni, ovisno o problemu) „ugrađeni" u jednadžbu koja definira problem. Integralne jednadžbe, stoga, nerijetko predstavljaju kompaktniju i pogodniju, a u slučajevima kada zapis pomoću diferencijalnih jednadžbi nije moguć, i jedinu moguću formulaciju problema.

Integralne se jednadžbe, uz izuzetak najjednostavnijih primjera, rješavaju numerički, a pristup se sastoji u podjeli domene integracije $[a,b]$ na konačan broj segmenata $[a_i, b_i]$ i zatim aproksimacije nepoznate funkcije na tim segmentima. Navedeni je postupak za primjer linearne aproksimacije funkcije prikazan na slici 15.



Sl. 15. Linearna aproksimacija nepoznate funkcije

Može se pokazati da se takvim linearnim postupkom aproksimacije nepoznate funkcije iz izraza (3.75) dobiva sustav linearnih jednadžbi [72]

$$\sum_{j=1}^{N}\left(g_i\delta_{ij}+\int_{a_j}^{b_j}K(x,t)N_1^j(t)\mathrm{d}t+\int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}}K(x,t)N_2^j(t)\mathrm{d}t\right)y_j=f_i\,, \tag{3.76}$$

čije su rješenje vrijednosti y_j nepoznate funkcije u točkama t_j. Pritom su u izrazu (3.76) $N_1{}^j$ i N_2^j prva, odnosno druga linearna interpolacijska funkcija (funkcija oblika), koje aproksimiraju nepoznatu funkciju unutar j-tog segmenta.

Gaussov i Greenov teorem: Temeljni matematički princip na temelju kojeg se izvodi formulacija metode rubnih elemenata može se sažeti u Gaussovu teoremu i Greenovu drugom teoremu. Gaussov se teorem, kojeg se također naziva i *teoremom o divergenciji*, za bilo koju skalarnu funkciju f, definiranu na području integracije Ω koje je omeđeno rubom Γ, može izraziti na sljedeći način [5,72]:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}fn_i\mathrm{d}\Gamma\,, \tag{3.77}$$

gdje su n_i komponente jediničnog vektora normale $\mathbf{n}$ na rub domene.

Također, primjenom Gaussova teorema može se pokazati da za dvije po volji odabrane funkcije f i g vrijedi

$$\int_{\Omega}(g\Delta f-f\Delta g)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}\left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma\,. \tag{3.78}$$

Izraz (3.78) poznat je pod nazivom *Greenov drugi teorem* ili *opći Greenov teorem u teoriji potencijala*. Ukoliko se za g uzme konstanta, tada izraz (3.78) postaje

$$\int_{\Omega}\nabla^2 f\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma\,, \tag{3.79}$$

što je rezultat od velike praktične važnosti u implementaciji metode rubnih elemenata na probleme u elastomehanici, u kojoj je značajan dio matematičke teorije formuliran upravo pomoću parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

3.4.2. Postupak rješavanja problema elastomehanike primjenom MRE

Kako je tematika ovog rada vezana uz analizu kontaktnog problema u domeni linearne teorije elastičnosti, korisno je prije detaljnijih razmatranja ukratko izložiti posve općenit opis najvažnijih aspekata i načelnih postupaka potrebnih u izvodu temeljnih jednadžbi i u implementaciji metode rubnih elemenata u analizi problema strukturne mehanike. Takva se procedura na pregledan i sažet način može objediniti u sljedećim koracima [5]:

1. Postavljanje Navierovih jednadžbi ravnoteže izraženih u ovisnosti o komponentama pomaka u_i. Te se jednadžbe dobiva uvrštavanjem izraza za vezu deformacija i pomaka u Hookeov zakon, čime se dobiva Hookeov zakon izražen preko pomaka i čije se jednadžbe potom uvrštava u Cauchyjeve jednadžbe ravnoteže.
2. Iznalaženje tzv. *osnovnog rješenja* koje zadovoljava diferencijalne jednadžbe zadanoga problema. Osnovno rješenje definira polje pomaka za Kelvinov problem, odnosno ono polje pomaka koje odgovara slučaju kada se jedinična koncentrirana sila primijeni u proizvoljnoj točki T beskonačnog prostora. Funkcija takvih pomaka ovisi o veličini $1/r$ ili $\ln(1/r)$, gdje je r udaljenost bilo koje točke Q ruba domene od točke T u kojoj djeluje koncentrirano opterećenje.
3. Primjenom Betti-Maxwellovog teorema (izvod prikazan u prilogu B) o uzajamnosti radova i elastičnih pomaka na temelju pomaka definiranih osnovnim rješenjem za zadani skup točaka pronalazi se rezultirajuće polje pomaka na rubu domene. Prema tom teoremu, rad sustava sila/opterećenja (a) na pomacima sustava sila/opterećenja (b) jednak je radu sustava sila (b) na pomacima uzrokovanima sustavom (a), odnosno:
$$\sum_i F_{\mathrm{P}_i}^{(\mathrm{a})} u_{\mathrm{P}_i}^{(\mathrm{b})} = \sum_i F_{\mathrm{P}_i}^{(\mathrm{b})} u_{\mathrm{P}_i}^{(\mathrm{a})}\,, \tag{3.80}$$
gdje je P_i i-ta točka u kojoj djeluje koncentrirana sila. Ukoliko se radi s opterećenjima definiranima na konačno velikom području S ruba domene, teorem se u svojoj kompletnoj formulaciji, koja obuhvaća i unutarnje sile, može zapisati u sljedećem obliku:
$$\int_\Gamma t_i^{(\mathrm{a})} u_i^{(\mathrm{b})} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}^{(\mathrm{a})}}{\partial x_j} u_i^{(\mathrm{b})} \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma t_i^{(\mathrm{b})} u_i^{(\mathrm{a})} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}^{(\mathrm{b})}}{\partial x_j} u_i^{(\mathrm{a})} \mathrm{d}\Omega\,, \tag{3.81}$$
gdje je $t_i = \sigma_{ij} n_j$ vektor površinske sile. Ukoliko se sustav (b) uzme kao sustav sila i polja pomaka osnovnog rješenja, tada će sustav (a) predstavljati polje sila i pomaka koje se želi pronaći. Tim se postupkom dobiva rubna integralna jednadžba, čije su rješenje nepoznati pomaci i opterećenja na rubu.
4. Diskretizacijom ruba na rubne elemente, rubni je integral potrebno izračunati u svakom elementu, unutar kojega se promjena geometrije i varijabli opisuje interpolacijskim funkcijama. Dobivene je integrale zbog složenosti podintegralnih funkcija uglavnom potrebno riješiti numerički. Sumiranjem integrala na svim elementima dobiva se aproksimativno rješenje rubnog integrala na čitavom rubu. Sam postupak sastoji se u primjeni koncentriranog opterećenja u svakoj točki (svakom čvoru svih rubnih elemenata), čime se dobiva osnovno rješenje za svaki čvor. Iz formulacije svakog pojedinačnog osnovnog rješenja proizlazi sustav od N linearnih jednadžbi, čiji broj odgovara dimenzionalnosti rješavanoga problema (za 3D problem 3 jednadžbe). S ukupno M čvorova na rubu dobiva se sustav od ukupno $M{\times}N$ linearnih jednadžbi koji ima oblik

$$[A][u]=[B][t]. \tag{3.82}$$

5. U sustav jednadžbi (3.82) potrebno je uvrstiti rubne uvjete, koji mogu biti poznati pomaci, poznate sile ili linearna zavisnost između sile i pomaka (npr. zbog krutosti/opruge vezane u čvoru). Preuređivanjem sustava jednadžbi (3.82) na način da sve nepoznate veličine budu s lijeve, a sve poznate veličine s desne strane znaka jednakosti dobiva se konačno sustav jednadžbi
$$[A^*][x] = [B^*][y] = [c], \tag{3.83}$$
u kojemu vektor $[x]$ sadrži sve nepoznate pomake i čvorna opterećenja, a vektor $[y]$ sadrži sve poznate pomake i čvorna opterećenja, odnosno rubne uvjete, pa je stoga $[c]$ vektor poznatih koeficijenata.
6. Sustav linearnih jednadžbi (3.83) potrebno je riješiti, a do rješenja se dolazi izračunavanjem svih nepoznatih pomaka i sila na rubu, sadržanih u vektoru $[x]$, čime se kompletiraju rubni uvjeti. Specifičnost je metode rubnih elemenata da je matrica sustava $[A^*]$ nesimetrična i u većini slučajeva potpuno popunjena koeficijentima različitima od nule.
7. Iz kompletiranih se rubnih uvjeta, odnosno vrijednosti pomaka i vektora opterećenja u svim točkama, mogu izračunati pomaci, deformacije i naprezanja unutar domene integracije.

3.4.3. Analitička formulacija MRE u linearnoj teoriji elastičnosti

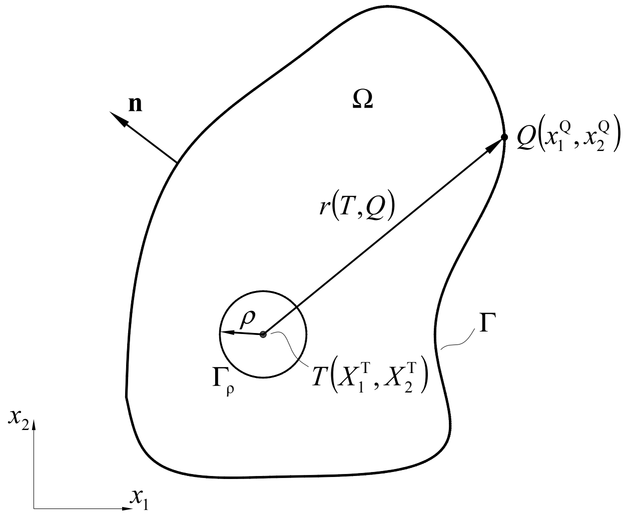
Navierova diferencijalna jednadžba:

Kako je već spomenuto u poglavlju 3.3.2, polazni korak u postavljanju rubne integralne jednadžbe je postavljanje Navierovih jednadžbi ravnoteže izraženih u ovisnosti o komponentama pomaka u_i. Uvrštavanjem izraza za vezu deformacija i pomaka u Hookeov zakon, čime se dobiva Hookeov zakon izražen preko pomaka, te uvrštavanjem tako dobivenih jednadžbi u Cauchyjeve jednadžbe ravnoteže, dobiva se

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}=-\frac{f_{\mathrm{V}i}}{G}, \tag{3.84}$$

gdje je G modul smika, a $f_{\mathrm{V}i}$ komponente volumenskih sila.

Na slici 16 prikazana je proizvoljna dvodimenzionalna domena nad kojom se traži rješenje jednadžbe (3.84) i unutar koje se nalazi točka $T\left(X_1^{\mathrm{T}}, X_2^{\mathrm{T}}\right)$, iz koje se promatra utjecaj koncentrirane jedinične sile na proizvoljnu točku $Q\left(x_1^{\mathrm{Q}}, x_2^{\mathrm{Q}}\right)$ na rubu domene.



Sl. 16. Dvodimenzionalna domena Ω; T – točka u unutrašnjosti domene iz koje se promatra utjecaj sile, Q – točka na rubu Γ domene u kojoj se promatra utjecaj sile u točki T, ρ - proizvoljno malen polumjer kružnice u okolici točke T, koju se isključuje iz područja integracije

Izraz (3.84) u danom obliku vrijedi za slučaj ravninske deformacije, dok je za slučaj ravninskog stanja naprezanja ν potrebno zamijeniti s $\nu/(1+\nu)$. Općenito govoreći, pri analizi ravninskog stanja naprezanja vrijedi u odnosu na jednadžbe za ravninsko stanje deformacije i zamjena modula elastičnosti E s modificiranim izrazom $E(1+2\nu)/(1+\nu)^2$. Za rješenje bilo kojeg problema opisanog jednadžbom (3.84) potrebno je definirati osnovno rješenje koje tu jednadžbu zadovoljava.

Osnovno rješenje:

Osnovno rješenje jednadžbe (3.84) definira utjecaj jedinične koncentrirane sile u točki T na proizvoljnu točku Q unutar domene integracije. Takvo rješenje mora zadovoljavati dva osnovna uvjeta [5]: (i) svi pomaci/naprezanja moraju iščezavati kako točka Q teži beskonačnosti, (ii) rješenje u točki T mora biti singularno. Zbog singularnosti osnovnog rješenja, po volji malenu okolinu točke T je u formulaciji rubne integralne jednadžbe potrebno isključiti iz područja integracije.

Iznalaženje osnovnoga rješenja može se u znatnoj mjeri pojednostaviti transformiranjem Navierove diferencijalne jednadžbe u biharmonijsku jednadžbu na način da se u razmatranje uvede tzv. *Galerkinov vektor* **V**, pomoću kojega se komponente vektora pomaka mogu izraziti kao [5,76]

$$u_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{3.85}$$

Uvrsti li se (3.85) u (3.84), dobiva se biharmonijska jednadžba

$$\nabla^4 V_i = -\frac{f_{\mathrm{V}i}}{G}, \tag{3.86}$$

čije se analitičko rješenje za ravninski problem može uzeti kao

$$V_i = \frac{1}{8\pi G} r^2(T,Q) \cdot \ln\left[\frac{1}{r(T,Q)}\right], \tag{3.87}$$

gdje je $r(T,Q)$ udaljenost točaka T i Q, koja je u dvije dimenzije definirana kao [12]

$$r(T,Q) = \sqrt{\left(X_1^{\mathrm{T}} - x_1^{\mathrm{Q}}\right)^2 + \left(X_2^{\mathrm{T}} - x_2^{\mathrm{Q}}\right)^2}\,. \tag{3.88}$$

Osnovno rješenje za pomake se jednostavno dobiva uvrštavanjem izraza (3.87) u (3.85), a kako osnovno rješenje definira utjecaj koncentrirane jedinične sile na polje pomaka u tijelu, potrebno je razmotriti utjecaj jedinične sile u svim koordinatnim smjerovima. To za ravninski problem rezultira trima neovisnima poljima pomaka U_{ij}, koja predstavljaju komponente osnovnog rješenja. Rezultirajuće komponente osnovnog rješenja dane su izrazom [2,5,76]

$$U_{ij}(T,Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\ln\left[\frac{1}{r(T,Q)}\right]\delta_{ij} + \frac{\partial r(T,Q)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial r(T,Q)}{\partial x_j}\right\}, \tag{3.89}$$

gdje prvi indeks označava koordinatni smjer pomaka točke Q uzrokovanog jediničnom silom primijenjenom u točki T u koordinatnom smjeru označenim drugim indeksom. Vidljivo je da su pomaci definirani izrazom (3.89) proporcionalni logaritmu udaljenosti $r(T, Q)$ pa ujedno zadovoljavaju zahtjeve singularnosti u točki T i limesa u nuli kada $Q \rightarrow \infty$, što podrazumijeva ujedno i $r \rightarrow \infty$. Vektor pomaka moguće je prikazati pomoću njegovih tenzorskih komponenti $U_{ij}(T,Q)$ kao

$$u_i = U_{ij}(T,Q)e_j\,, \tag{3.90}$$

gdje su e_j jedinični vektori u smjeru koordinatnih osi.

Komponente osnovnog rješenja vektora površinskih sila u točkama na rubu domene može se izvesti diferenciranjem osnovnog rješenja za pomake i uvrštavanjem u jednadžbe Hookeovog zakona, čime se dobiva [2,5,76]

$$\begin{aligned} T_{ij} = {} & \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(T,Q)}\cdot\frac{\partial r(T,Q)}{\partial n}\left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2\frac{\partial r(T,Q)}{\partial x_i}\frac{\partial r(T,Q)}{\partial x_j}\right] + \\ & + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(T,Q)}\left[\frac{\partial r(T,Q)}{\partial x_j}n_i - \frac{\partial r(T,Q)}{\partial x_i}n_j\right]. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Analogno izrazu (3.90), i vektor površinske sile može se zapisati pomoću komponenata osnovnog rješenja opterećenja pogodno rastaviti na tenzorske funkcije prema izrazu

---

[12] Koordinate pisane velikim slovima X_1 i X_2 označavaju položaj nepomične točke, dok su koordinate pisane malim slovima x_1 i x_2 promjenjive, tj. odnose se na točku koja se može pomicati duž ruba.

$$t_i = T_{ij}(T,Q)e_j \,, \tag{3.92}$$

Derivacija u smjeru normale dana je relacijom

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial n}, \tag{393}$$

gdje derivacija koordinate x_i po normali n predstavlja komponentu jediničnog vektora normale n_i u smjeru odgovarajuće koordinatne osi, odnosno

$$n_i = \frac{\partial x_i}{\partial n}. \tag{3.94}$$

Za derivacije udaljenosti r vrijedi

$$\frac{\partial r(T,Q)}{\partial x_i} = \frac{x_i^{\mathrm{Q}} - X_i^{\mathrm{T}}}{r(T,Q)}. \tag{3.95}$$

Rubna integralna jednadžba:

Rubnu se integralnu jednadžbu izvodi iz Betti-Maxwellovog teorema o uzajamnosti radova i pomaka primjenom osnovnog rješenja. Uzimajući u razmatranje i volumenske sile te grupiranjem iste grupe sila s jedne strane znaka jednakosti, Betti-Maxwellov teorem može se zapisati u sljedećem obliku:

$$\int_\Gamma t_i^{(a)} u_i^{(b)} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega f_{\mathrm{V}i}^{(a)} u_i^{(b)} \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma t_i^{(b)} u_i^{(a)} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega f_{\mathrm{V}i}^{(b)} u_i^{(a)} \mathrm{d}\Omega \,. \tag{3.96}$$

Uzimajući da skup (a) predstavlja nepoznate vektore površinskih sila i pomaka čije je vrijednosti uz zadovoljenje rubnih uvjeta potrebno pronaći, te da je skup (b) skup poznatih površinskih sila i pomaka, kao na primjer rješenja koja zadovoljavaju Kelvinov problem, tada se u izraz (3.96) mogu uvesti sljedeće supstitucije:

$$u_i^{(a)} = u_i(Q) \;;\; t_i^{(a)} = t_i(Q) \;;\; f_{\mathrm{V}i}^{(a)} = f_{\mathrm{V}i}(q), \tag{3.97.a}$$

$$u_i^{(b)} = U_{ij}(T,Q)e_j \;;\; t_i^{(b)} = T_{ij}(T,Q)e_j \;;\; f_{\mathrm{V}i}^{(b)} = 0\,, \tag{3.97.b}$$

gdje su tenzorske funkcije $U_{ij}(T,Q)$ i $T_{ij}(T,Q)$ određene izrazima (3.89) i (3.91), a volumenske su sile prisutne isključivo u unutrašnjim točkama q domene Ω, ali ne i točkama Q na rubu Γ.

Nakon uvođenja supstitucije dane s (3.97) te izdvajanjem točke T iz domene integracije kružnicom proizvoljno malog polumjera ρ, kako je prikazano na slici 16, izraz (3.96) postaje

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\rho} U_{ij}(T,Q) f_{\mathrm{V}i}(q) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma \cup \Gamma_\rho} \left[u_i(Q) T_{ij}(T,Q) - U_{ij}(T,Q) t_i(Q) \right] \mathrm{d}\Gamma \,. \tag{3.98}$$

Za slučaj kada $\rho \to 0$, na rubu Γ_ρ okoline točke T vrijedi

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma_\rho} U_{ij}(T,Q)t_i(Q)\mathrm{d}\Gamma = 0, \tag{3.99}$$

pa se iz (3.98) dobiva

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_\rho} U_{ij}(T,Q)f_{\mathrm{V}i}(q)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma\cup\Gamma_\rho} u_i(Q)T_{ij}(T,Q)\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma} U_{ij}(T,Q)t_i(Q). \tag{3.100}$$

Izraz (3.100) mora vrijediti za svako derivabilno polje pomaka pa tako i za $u_i(Q)$ = konst., što za posljedicu ima $t_i(Q) = 0$, $f_{\mathrm{V}i}(Q) = 0$ i $u_i(Q) = u_i(T)$. Uvrštavanjem navedenih jednakosti u izraz (3.100) dobiva se

$$0 = \int_{\Gamma\cup\Gamma_\rho} u_i(T)T_{ij}(T,Q)\mathrm{d}\Gamma. \tag{3.101}$$

Uvažavajući da mora vrijediti

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma_\rho} u_i(Q)T_{ij}(T,Q)\mathrm{d}\Gamma = u_i(T)\int_{\Gamma_\rho} T_{ij}(T,Q)\mathrm{d}\Gamma \tag{3.102}$$

i oduzimanjem izraza (3.101) od izraza (3.100), dobiva se rubna integralna jednadžba

$$u_i(T)\kappa_{ij} = \int_{\Gamma}\left[u_i(Q)T_{ij}(T,Q) - U_{ij}(T,Q)t_i(Q)\right]\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega\backslash\Omega_\rho} U_{ij}(T,Q)f_{\mathrm{V}i}(q)\mathrm{d}\Omega. \tag{3.103}$$

koja se naziva i *Somiglianin identitet za pomake*, gdje je κ_{ij} konstantni tenzor određen s

$$\kappa_{ij} = \kappa_{ij}(T) = \int_{\Gamma} T_{ij}(T,Q)\mathrm{d}\Gamma. \tag{3.104}$$

Dobivena rubna integralna jednadžba povezuje dva zasebna problema – osnovno rješenje za silu koja djeluje u točki, određeno jezgrama integralne jednadžbe U_{ij} i T_{ij}, te problem čije se rješenje želi pronaći, odnosno nepoznate varijable u_j i t_j. Somiglianin identitet, odnosno izraz (3.103), jednoznačno određuje vrijednost pomaka u_j u bilo kojoj unutrašnjoj točki T domene Ω kada su veličine u_j i t_j poznate u svim rubnim točkama.

Za rješenje postavljenoga problema potrebno je razmotriti koje vrijednosti konstantni tenzor κ_{ij} iz izraza (3.104) poprima u ovisnosti o položaju točke T prema području integracije Ω. Postoje tri moguća slučaja položaja točke T, koji daju rješenja:

$$(\forall T \notin \Omega) \quad \kappa_{ij} = \int_{\Gamma} T_{ij}(T,Q)\mathrm{d}\Gamma = 0, \tag{3.105.a}$$

$$(\forall T \in \Omega\setminus\Gamma) \quad \kappa_{ij} = \int_{\Gamma} T_{ij}(T,Q)\mathrm{d}\Gamma = \delta_{ij}, \tag{3.105.b}$$

$$(\forall T \in \Gamma) \quad \kappa_{ij} = \int_{\Gamma} T_{ij}(T,Q)\mathrm{d}\Gamma = 1/2\,\delta_{ij}. \tag{3.105.c}$$

Izraz (3.105.c) primjenjuje se kada se točka T nalazi na glatkom rubu. U slučaju kada se točka T nalazi na mjestu gdje rub nije gladak, odnosno gdje se nalazi diskontinuitet (ne prekid), κ_{ij} može poprimiti vrijednost između 0 i 1 [72].

Rubnu integralnu jednadžbu analognu Somiglianinom identitetu može se dobiti i za naprezanja u proizvoljnoj unutrašnjoj točki T. Kako izraz (3.103) određuje komponente pomaka u svakoj točki domene, na temelju tih pomaka moguće je odrediti i komponente deformacije i naprezanja u tim istim točkama. Diferenciranjem izraza (3.103) i uvrštavanjem u Hookeov zakon, može se postaviti jednadžba analogna Somiglianinom identitetu

$$\sigma_{ij}(T)+\int_{\Gamma} S_{ijk}(T,Q)u_k(Q)\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma} D_{ijk}(T,Q)t_k(Q)\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega\backslash\Omega_\rho} D_{ijk}(T,Q)f_{Vk}(Q)\mathrm{d}\Omega\,, \qquad (3.106)$$

gdje su jezgre takve integralne jednadžbe tenzori trećeg reda S_{kij} i D_{kij}, koji su za ravninski problem određeni izrazima [2,5]:

$$\begin{aligned}
S_{ijk}(T,Q)=&\frac{G}{2\pi(1-\nu)}\cdot\frac{1}{r^2}n_i\left[2\nu\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}+(1-2\nu)\delta_{jk}\right]\\
&+\frac{G}{2\pi(1-\nu)}\cdot\frac{1}{r^2}n_j\left[2\nu\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}+(1-2\nu)\delta_{ik}\right]\\
&+\frac{G}{2\pi(1-\nu)}\cdot\frac{1}{r^2}n_k\left[2(1-2\nu)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}+(1-4\nu)\delta_{ij}\right]\\
&+\frac{G}{\pi(1-\nu)}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}+\nu\left(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial x_i}+\delta_{ik}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)-4\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right],
\end{aligned} \qquad (3.107.a)$$

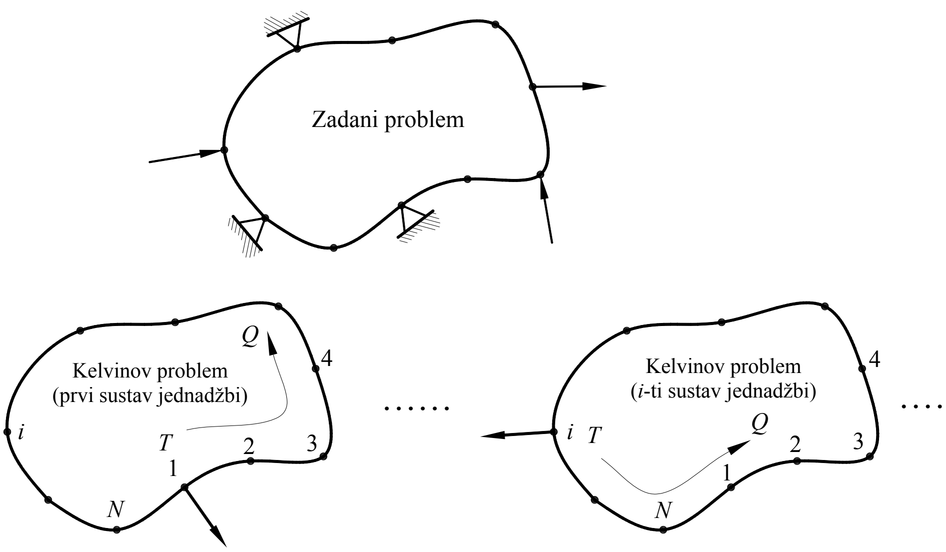
$$D_{ijk}(T,Q)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\cdot\frac{1}{r}\left[(1-2\nu)\left(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial x_i}+\delta_{ik}\frac{\partial r}{\partial x_j}-\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)+2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right]. \qquad (3.107.b)$$

Tenzori S_{ijk} i D_{ijk} predstavljaju osnovna rješenja za polje naprezanja i deformacije, odnosno definiraju tenzorsku komponentu naprezanja ili deformacije ij kada je u točki T primijenjena jedinična sila u koordinatnom smjeru k.

3.4.4. Numerička implementacija

Kako bi se rubnu integralnu jednadžbu moglo riješiti, rub domene dijeli se na rubne elemente. Rubni su elementi definirani svojim čvorovima, a u analizi ravninskih problema u svakom su čvoru prisutne četiri varijable: dvije komponente vektora pomaka u_1 i u_2 i dvije komponente vektora površinskih sila t_1 i t_2. Time problem čiji je rub diskretiziran s N čvorova ima ukupno $4N$ varijabli. Da bi se za bilo koji zadani problem moglo pronaći jedinstveno rješenje, potrebno je u svakome čvoru poznavati polovicu od ukupnog broja varijabli, što znači da u čvoru moraju biti zadane obje komponente pomaka ili obje komponente sile ili po jedna komponenta pomaka i sile. Tako definiran problem ima, stoga, $2N$ nepoznanica za čije je rješenje potrebno $2N$ jednadžbi.

Te se jednadžbe dobiva na način da se u svakome od N čvorova postavi sustav od dvije jednadžbe (za 2D problem) definiran izrazom (3.103), a koje proizlaze iz osnovnog rješenja Kelvinovog problema. Definiranjem jedinične sile u čvoru 1 primjenom se osnovnog rješenja definiraju sve rezultirajuće komponente pomaka i vektora površinskih sila u svim preostalim čvorovima, čime se definiraju prva dva retka u matrici sustava linearnih jednadžbi. Premještanjem jedinične sile u čvor 2 dobivaju se treći i četvrti redak matrice, a isti se postupak ponavlja sve do N-tog čvora, čime su definirani koeficijenti u posljednja dva retka. Koncept opisanog postupka zornije je predočen na slici 17.



Sl. 17. Princip postavljanja sustava linearnih jednadžbi

Sustav linearnih jednadžbi koji proizlazi iz opisanog postupka u pravilu rezultira matricom sustava koja je u potpunosti popunjena koeficijentima različitima od nule. Razlog ovome leži u činjenici da sila u svakom čvoru u svim varijablama „proizvodi" utjecaj na sve ostale čvorove, što je samo po sebi u potpunosti u duhu koncepta integralnih jednadžbi, koje problem obuhvaćaju na čitavoj domeni integracije.

Podjela ruba na elemente implementira se diskretizacijom rubne integralne jednadžbe dane izrazom (3.103). Izraz (3.103) mora vrijediti unutar svakog elementa pa svaki integral definiran po čitavom rubu Γ mora biti jednak sumi integrala po pojedinim rubnim elementima S_m. Primjenom principa prikazanog na slici 17, iz svake točke T^n potrebno je odrediti i zbrojiti integrale u izrazu (3.103) krećući se rubom domene po točkama Q^k pa se stoga može napisati

$$u_i\left(T^n\right)\sum_m \int_{S_m} T_{ij}\left(T^n, Q^k\right)\mathrm{d}\Gamma = \sum_m \int_{S_m} u_i\left(Q^k\right)T_{ij}\left(T^n, Q^k\right)\mathrm{d}\Gamma - \sum_m \int_{S_m} U_{ij}\left(T^n, Q^k\right)t_i\left(Q^k\right)\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega\backslash\Omega_p} U_{ij}\left(T^n, Q^k\right)f_{Vi}\mathrm{d}\Omega \,. \tag{3.108}$$

Radi jednostavnosti princip formulacije sustava jednadžbi bit će objašnjen na primjeni konstantnih rubnih elemenata. Konstantni element u ravninskim problemima predstavljen je ravnom crtom, element sadrži jedan čvor koji se nalazi na njegovoj sredini, a funkcija koja određuje rubne uvjete unutar elementa aproksimirana je konstantnom vrijednošću. Usvajajući skraćenu notaciju za varijable i funkcije $u_i(T^n)=u_i^n$, $t_i(Q^m)=t_i^m$ itd. i uvažavajući da je $\mathrm{d}\Gamma=\mathrm{d}\Gamma(T^n)=\mathrm{d}\Gamma^n$, za integraciju po rubu aproksimiranom konstantnim rubnim elementima može se pisati

$$u_i^n \sum_m \int_{S_m} T_{ij}\,\mathrm{d}\Gamma^n = \sum_m u_i^m \int_{S_m} T_{ij}\mathrm{d}\Gamma^n - \sum_m t_i^m \int_{S_m} U_{ij}\mathrm{d}\Gamma^n - \int_{\Omega\backslash\Omega_\rho} U_{ij} f_{\mathrm{V}i}\mathrm{d}\Omega\,. \tag{3.109}$$

Grupiranjem svih pribrojnika u izrazu (3.109) s jedne strane znaka jednakosti dobiva se

$$\sum_m \left(u_i^m - u_i^n\right)\int_{S_m} T_{ij}\mathrm{d}\Gamma^n - \sum_m t_i^m \int_{S_m} U_{ij}\mathrm{d}\Gamma^n - \int_{\Omega\backslash\Omega_\rho} U_{ij} f_{\mathrm{V}i}\mathrm{d}\Omega = 0\,, \tag{3.110}$$

što je sustav jednadžbi kojeg se sažetije može napisati kao

$$\sum_m \left(u_i^m - u_i^n\right)a_{ij}^{mn} - \sum_m t_i^m b_{ij}^{mn} - c_j^n = 0 \quad \forall(j,n)\,, \tag{3.111}$$

gdje se podrazumijeva da indeksi j i n nisu indeksi zbrajanja.

3.4.5. Primjena MRE na kontaktne probleme

Osnovna razmatranja:

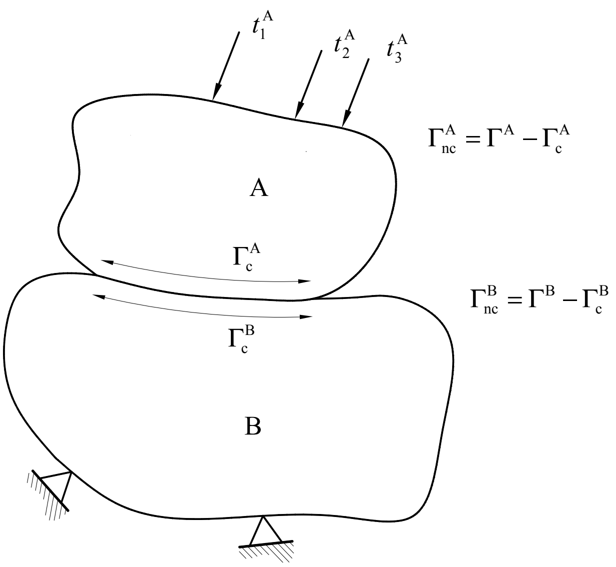
U analizi kontaktnih problema potrebno je riješiti po jednu rubnu integralnu jednadžbu za svako tijelo u kontaktu, pri čemu treba voditi računa da su jednadžbe, odnosno rezultirajući sustavi linearnih jednadžbi, međusobno spregnuti tzv. kontaktnim uvjetima.

U stanju kontakta dvama se tijelima dio ruba poklapa duž kontaktne površine Γ_c [13], a dio ruba tijela A i B koji se ne nalazi u kontaktu označit će se s $\Gamma_\mathrm{nc}^\mathrm{A}$ i $\Gamma_\mathrm{nc}^\mathrm{B}$. Može se, prema tome, pisati

$$\begin{aligned}\Gamma^\mathrm{A} &= \Gamma_\mathrm{nc}^\mathrm{A} + \Gamma_\mathrm{c}^\mathrm{A}\,,\\ \Gamma^\mathrm{B} &= \Gamma_\mathrm{nc}^\mathrm{B} + \Gamma_\mathrm{c}^\mathrm{B}\,.\end{aligned} \tag{3.112}$$

Na slici 18 prikazan je primjer kontakta dvaju elastičnih tijela A i B definiranih rubovima Γ^A i Γ^B.

[13] Oznaka za kontaktnu površinu Γ_c, kako je već navedeno u objašnjenju Signorinijeva problema, osim stvarne, uključuje i potencijalnu kontaktnu površinu, odnosno dio ruba za kojeg se predviđa da bi na njemu uslijed deformacija s povećanjem opterećenja moglo/trebalo doći do prenošenja kontaktnih pritisaka.



Sl. 18. Primjer kontaktnog problema; Γ_{nc} je dio ruba preko kojeg se ne ostvaruje kontakt

Dvije rubne integralne jednadžbe koje treba riješiti za tijela A i B može se, uz zanemarenje volumenskih sila, napisati u obliku [2]

$$\kappa_{ij}^{\mathrm{A}} u_j + \int_{\Gamma_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{A}}} T_{ij}^{\mathrm{A}} u_j^{\mathrm{A}} \mathrm{d}\Gamma^{\mathrm{A}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{c}}^{\mathrm{A}}} T_{ij}^{\mathrm{A}} u_j^{\mathrm{A}} \mathrm{d}\Gamma^{\mathrm{A}} = \int_{\Gamma_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{A}}} U_{ij}^{\mathrm{A}} t_j^{\mathrm{A}} \mathrm{d}\Gamma^{\mathrm{A}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{c}}^{\mathrm{A}}} U_{ij}^{\mathrm{A}} t_j^{\mathrm{A}} \mathrm{d}\Gamma^{\mathrm{A}} , \tag{3.113.a}$$

$$\kappa_{ij}^{\mathrm{B}} u_j + \int_{\Gamma_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{B}}} T_{ij}^{\mathrm{B}} u_j^{\mathrm{A}} \mathrm{d}\Gamma^{\mathrm{B}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{c}}^{\mathrm{B}}} T_{ij}^{\mathrm{B}} u_j^{\mathrm{B}} \mathrm{d}\Gamma^{\mathrm{B}} = \int_{\Gamma_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{B}}} U_{ij}^{\mathrm{B}} t_j^{\mathrm{B}} \mathrm{d}\Gamma^{\mathrm{B}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{c}}^{\mathrm{B}}} U_{ij}^{\mathrm{B}} t_j^{\mathrm{B}} \mathrm{d}\Gamma^{\mathrm{B}} , \tag{3.113.b}$$

iz kojih se dobivaju dva linearna sustava jednadžbi koje se posve općenito može napisati kao

$$\begin{bmatrix} [A]^{\mathrm{A}} & 0 \\ 0 & [A]^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]^{\mathrm{A}} \\ [u]^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B]^{\mathrm{A}} & 0 \\ 0 & [B]^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [t]^{\mathrm{A}} \\ [t]^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} . \tag{3.114}$$

Iz izraza (3.114) vidljivo je da ukupna matrica sustava nije posve popunjena koeficijentima različitima od nule, što kontaktne probleme čini vrlo rijetkim izuzetkom u implementaciji metode rubnih elemenata.

Specifičnost kontaktnih problema u usporedbi s konvencionalnim problemima jest ta da čvorovi na kontaktnoj površini, za razliku od svih ostalih čvorova na dijelu rubova $\Gamma_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{A}}$ i $\Gamma_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{B}}$, nemaju definirane rubne uvjete u vidu poznatih pomaka ili površinskih sila. U tim čvorovima, kako je već napomenuto u poglavlju 3.1, moraju biti zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti normalnih pomaka i uvjeti ravnoteže površinskih sila. U analizi ravninskih problema to znači da je varijable u_{n}, u_{t}, t_{n} i t_{t} na kontaktnoj površini oba tijela potrebno povezati u potreban broj jednadžbi kontaktnih uvjeta, koji predstavljaju svojevrsne „rubne uvjete“ na kontaktnoj površini. U formulaciji MRE pogodno je ne raditi distinkciju u notaciji između površinskih sila i kontaktnih sila te usvojiti jedinstvenu oznaku t_i, s obzirom na svojstva rubne integralne jednadžbe i specifičnosti samog postupka implementacije metode rubnih elemenata. Kako su površinske sile i pomaci na kontaktnoj površini u stvari veličine definirane na rubu domene, metoda rubnih elemenata iznimno je pogodna za izravno uključivanje nepoznanica spregnutih kontaktnim uvjetima u rezultirajuće sustave jednadžbi, što je u engleskoj literaturi poznato pod nazivom *direct constraint technique*.

Dvije se točke u dodiru mogu nalaziti u stanju prianjanja ili u stanju klizanja. Kontaktni se uvjeti u stanju prianjanja mogu opisati sljedećim izrazima:

$$t_\mathrm{t}^\mathrm{A} - t_\mathrm{t}^\mathrm{B} = 0 \;\; ; \;\; t_\mathrm{n}^\mathrm{A} - t_\mathrm{n}^\mathrm{B} = 0 \;\; ; \;\; u_\mathrm{t}^\mathrm{A} + u_\mathrm{t}^\mathrm{B} = 0 \;\; ; \;\; u_\mathrm{n}^\mathrm{A} + u_\mathrm{n}^\mathrm{B} = 0 , \tag{3.115}$$

Pretpostavi li se da između površina u dodiru postoji trenje, određeno koeficijentom trenja μ, te da se ono može opisati Coulombovim modelom, za točke koje se nalaze u stanju međusobnog klizanja (kada je nadvladana sila trenja) kontaktni će uvjeti imati oblik:

$$t_\mathrm{t}^\mathrm{A} - t_\mathrm{t}^\mathrm{B} = 0 \;\; ; \;\; t_\mathrm{n}^\mathrm{A} - t_\mathrm{n}^\mathrm{B} = 0 \;\; ; \;\; u_\mathrm{t}^\mathrm{A} = u_\mathrm{t}^\mathrm{B} + \delta_\mathrm{t} \;\; ; \;\; u_\mathrm{n}^\mathrm{A} + u_\mathrm{n}^\mathrm{B} = 0 , \tag{3.116}$$

gdje je δ_t iznos pomaka u smjeru tangente uslijed klizanja i gdje u skladu s Coulombovim zakonom trenja za također mora vrijediti i

$$t_\mathrm{t}^\mathrm{A} \pm \mu t_\mathrm{n}^\mathrm{A} = 0 , \tag{3.117}$$

neovisno o smjeru klizanja, što je uzeto u obzir dvojnim predznakom drugog pribrojnika u izrazu (3.117).

Inkrementalna formulacija problema:

Rubna integralna jednadžba problema elastostatike općenito je oblika

$$\kappa_{ij} u_j + \int_\Gamma T_{ij} u_j \,\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma U_{ij} t_j \,\mathrm{d}\Gamma . \tag{3.118}$$

Ukoliko se u statički uravnotežen sustav sila uvede prirast opterećenja ΔP_j^k, doći će do malene promjene rubnih pomaka i površinskih sila, s kojima će se uspostaviti novo stanje statičke ravnoteže. Opterećenje nakon inkrementalnog prirasta iznosi

$$P_j^k = P_j^{k-1} + \Delta P_j^k , \tag{3.119}$$

a odgovarajuće vrijednosti pomaka i površinskih sila su

$$u_j^k = u_j^{k-1} + \Delta u_j^k \;\; ; \;\; t_j^k = t_j^{k-1} + \Delta t_j^k , \tag{3.120}$$

gdje su Δt_j^k i Δu_j^k rezultirajuće inkrementalne promjene površinskih sila i pomaka. Uvrštavanjem novih vrijednosti iz (3.120) u (3.118) dobiva se

$$\kappa_{ij} \left(u_j^{k-1} + \Delta u_j^k \right) + \int_\Gamma T_{ij} \left(u_j^{k-1} + \Delta u_j^k \right) \mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma U_{ij} \left(t_j^{k-1} + \Delta t_j^k \right) \mathrm{d}\Gamma . \tag{3.121}$$

Iz izraza (3.121) može se izdvojiti integralna jednadžba izražena samo pomoću inkremenata varijabli

$$\kappa_{ij}\Delta u_j^k + \int_\Gamma T_{ij}\,\Delta u_j^k \mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma U_{ij}\Delta t_j^k \mathrm{d}\Gamma\,. \tag{3.122}$$

Organiziranjem čvorova na način da tvore kontaktne parove u kontaktnoj zoni, svakom se kontaktnom paru mora pristupiti kao samostalnom kontaktnom sustavu u kojemu inkrementalne varijable Δt_j^k i Δu_j^k moraju zadovoljiti uvjete ravnoteže i kompatibilnosti. Diskretizacija dvaju tijela i u ovom slučaju, analogno izrazu (3.114), za svaku iteraciju proizvodi dva sustava linearnih jednadžbi, čija su rješenja nepoznati inkrementalni čvorni pomaci i površinske sile:

$$[A]^{\mathrm{A}}[\Delta u]^{\mathrm{A}} = [B]^{\mathrm{A}}[\Delta t]^{\mathrm{A}} \quad ; \quad [A]^{\mathrm{B}}[\Delta u]^{\mathrm{B}} = [B]^{\mathrm{B}}[\Delta t]^{\mathrm{B}}\,. \tag{3.123}$$

Nakon primjene rubnih uvjeta izvan kontaktne površine i kontaktnih uvjeta unutar kontaktne površine, inkrementalne se sustave jednadžbi koji odgovaraju izrazu (3.123) rješava kroz iste korake i na isti način kao i standardne sustave jednadžbi.

U inkrementalnoj formulaciji problema izraženoj u obliku rubne integralne jednadžbe dane izrazom (3.122), kontaktni se uvjeti za sve kontaktne parove također moraju izraziti u obliku koji je pogodan za inkrementalni pristup rješavanja. Nakon svakog inkrementa vanjskog opterećenja ΔP^k, inkrementalne se varijable Δu^k i Δt^k dobivaju uz zadovoljavanje uvjeta ravnoteže i kompatibilnosti ukupnih vrijednosti sila i pomaka.

Tako se za slučaj prianjanja kontaktni uvjeti mogu napisati u obliku [2]:

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{A}}\right)^k - \Delta\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{B}}\right)^k = -\left[\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{A}}\right)^{k-1} - \left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{B}}\right)^{k-1}\right],\\
&\Delta\left(t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}\right)^k - \Delta\left(t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^k = -\left[\left(t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}\right)^{k-1} - \left(t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^{k-1}\right],\\
&\Delta\left(u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{A}}\right)^k - \Delta\left(u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{B}}\right)^k = 0,\\
&\Delta\left(u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}\right)^k - \Delta\left(u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^k = d_0 - \left[\left(u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}\right)^{k-1} - \left(u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^{k-1}\right] = d_0^k,
\end{aligned} \tag{3.124}$$

gdje je d_0 razmak (zračnost) između čvorova prije nego što su uslijed djelovanja prirasta vanjskog opterećenja dovedeni u kontakt.

Za slučaj klizanja kontaktni će uvjeti biti [2]:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{A}}\right)^{k}-\Delta\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{B}}\right)^{k}=-\left[\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{A}}\right)^{k-1}-\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{B}}\right)^{k-1}\right],\\
&\Delta\left(t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}\right)^{k}-\Delta\left(t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^{k}=-\left[\left(t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}\right)^{k-1}-\left(t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^{k-1}\right],\\
&\Delta\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{A}}\right)^{k}\pm\mu\Delta\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{B}}\right)^{k}=-\left[\left(t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{A}}\right)^{k-1}\pm\mu\left(t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^{k-1}\right],\\
&\Delta\left(u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}\right)^{k}-\Delta\left(u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^{k}=d_{0}-\left[\left(u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}\right)^{k-1}-\left(u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^{k-1}\right]=d_{0}^{k}.
\end{aligned}
\tag{3.125}
$$

Desna strana izraza (3.124) i (3.125) sadrži ukupne vrijednosti komponenata površinskih sila i pomaka iz prethodnog, odnosno (k –1)-vog koraka, koje su u svakom k-tom koraku već poznate, dok su nepoznanice inkrementalne vrijednosti varijabli na lijevoj strani.

U svakoj je iteraciji unutar svakog koraka potrebno utvrditi kakvo je kontaktno stanje i to u skladu s uvjetima prikazanima u tablicama 1 i 2 [2].

Tab. 1. Provjera kontakta

PRETPOSTAVKA	*UTVRĐENO STANJE*	
	zračnost	*kontakt*
zračnost	$\left(\Delta u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}+\Delta u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^{k}<d_{0}^{k-1}$	$\left(\Delta u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{A}}+\Delta u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{B}}\right)^{k}\geq d_{0}^{k-1}$
kontakt	$t_{\mathrm{n}}^{k\text{-}1}+\Delta t_{\mathrm{n}}^{k}\geq 0$	$t_{\mathrm{n}}^{k\text{-}1}+\Delta t_{\mathrm{n}}^{k}<0$

Potrebno je napomenuti kako kršenje nejednakosti za pomake za slučaj kontakta u tablici 1 predstavlja geometrijsku nekompatibilnost i ne smije se javljati u niti jednoj fazi proračuna. U slučaju da je u skladu s kriterijima danima u tablici 1 utvrđeno stanje kontakta, na temelju tablice 2 može se odrediti karakter trenutnog kontaktnog stanja (prianjanje ili klizanje).

Tab. 2. Utvrđivanje kontaktnog stanja

PRETPOSTAVKA	*UTVRĐENO STANJE*	
	prianjanje	*klizanje*
prianjanje	$\left\lvert t_{\mathrm{t}}^{k\text{-}1}+\Delta t_{\mathrm{t}}^{k}\right\rvert<\mu\left\lvert t_{\mathrm{n}}^{k\text{-}1}+\Delta t_{\mathrm{n}}^{k}\right\rvert$	$\left\lvert t_{\mathrm{t}}^{m\text{-}1}+\Delta t_{\mathrm{t}}^{m}\right\rvert\geq\mu\left\lvert t_{\mathrm{n}}^{m\text{-}1}+\Delta t_{\mathrm{n}}^{m}\right\rvert$
klizanje	$\left(t_{\mathrm{t}}^{k\text{-}1}+\Delta t_{\mathrm{t}}^{k}\right)^{\mathrm{A,B}}\left(\Delta u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{A}}+\Delta u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{B}}\right)^{k}>0$	$\left(t_{\mathrm{t}}^{k\text{-}1}+\Delta t_{\mathrm{t}}^{k}\right)^{\mathrm{A,B}}\left(\Delta u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{A}}+\Delta u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{B}}\right)^{k}\leq 0$

Poglavlje 4

REZULTATI NUMERIČKE ANALIZE

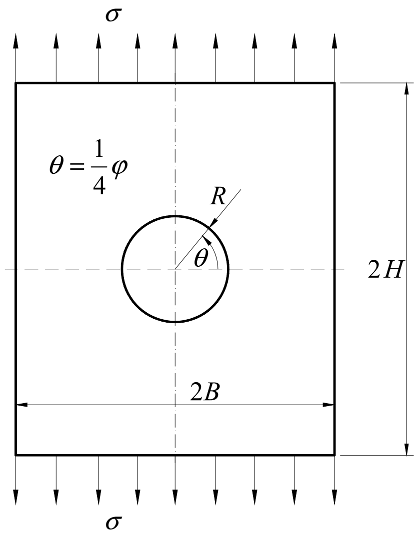
4.1. Problem svornjaka u ploči

U svim obrađenim problemima korišteni su dvodimenzionalni četverokutni konačni elementi namijenjeni analizi ravninskog stanja deformacije (eng. *plane strain*). Geometrijska je konfiguracija uzeta za slučaj nulte zračnosti, odnosno savršeno točnog poklapanja profila svornjaka i provrta u ploči, čime se osigurava pojava smanjenja kontaktne površine uslijed vanjskog opterećenja. Materijal je pretpostavljen kao izotropan i linearno elastičan i korištena je nelinearna statička analiza. Analize su za ovu skupinu problema napravljene za slučaj opterećenja ruba ploče jednolikim vlačnim opterećenjem, kao i za češće proučavan slučaj opterećenja svornjaka koncentriranom silom u njegovu središtu.

Premda su obrađeni problemi dvoosno simetrični, u modelima je i za slučaj opterećenja ploče i za slučaj opterećenja svornjaka modelirana polovica, umjesto samo četvrtine geometrije. Potreba za ovakvim pristupom za slučaj opterećenja ploče proizlazi iz činjenice da nije unaprijed poznata točna raspodjela unutarnjih sila na liniji okomitoj na smjer djelovanja opterećenja, a koja se proteže od ruba ploče do provrta; ukoliko bi ta raspodjela unutrašnjih sila bila poznata, onda bi se mogla i definirati kao rubni uvjet. S druge strane, u slučaju opterećenja svornjaka silom u njegovu centru, rubni uvjeti simetrije na dvije međusobno okomite linije koje prolaze kroz svornjak onemogućili bi deformaciju i pomicanje svornjaka pa samim time i prenošenje opterećenja na ploču.

4.1.1. Svornjak u provrtu opterećene ploče

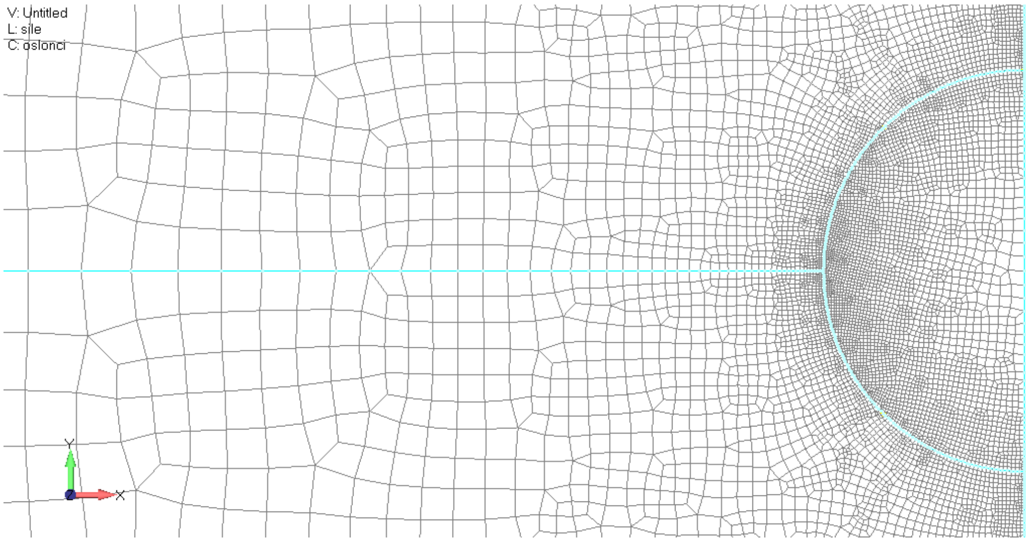
U svrhu usporedbe analiziran je problem s parametrima za koje je rješenje dao Man u literaturi [2]. Praksa pokazuje kako konačne dimenzije ploče imaju izuzetno velik utjecaj na odstupanje raspodjele kontaktnih pritisaka od analitičkih rješenja za beskonačne ploče opterećene u beskonačnosti, neovisno o finoći mreže [2]. Dobivena razlika postaje zanemariva tek za slučajeve kada je manja dimenzija ploče puno veća od promjera svornjaka (20 puta i više), što bi za dovoljno dobra rješenja zahtijevalo mrežu s dosta velikim brojem elemenata. Iz tog je razloga za preliminarnu provjeru točnosti i pouzdanosti primijenjenog pristupa u izradi numeričkih modela na temelju primjera iz literature [2] izabran proračunski najmanje zahtjevan problem. Zadani je problem prikazan na slici 19.



Sl. 19. Problem svornjaka u provrtu opterećene ploče

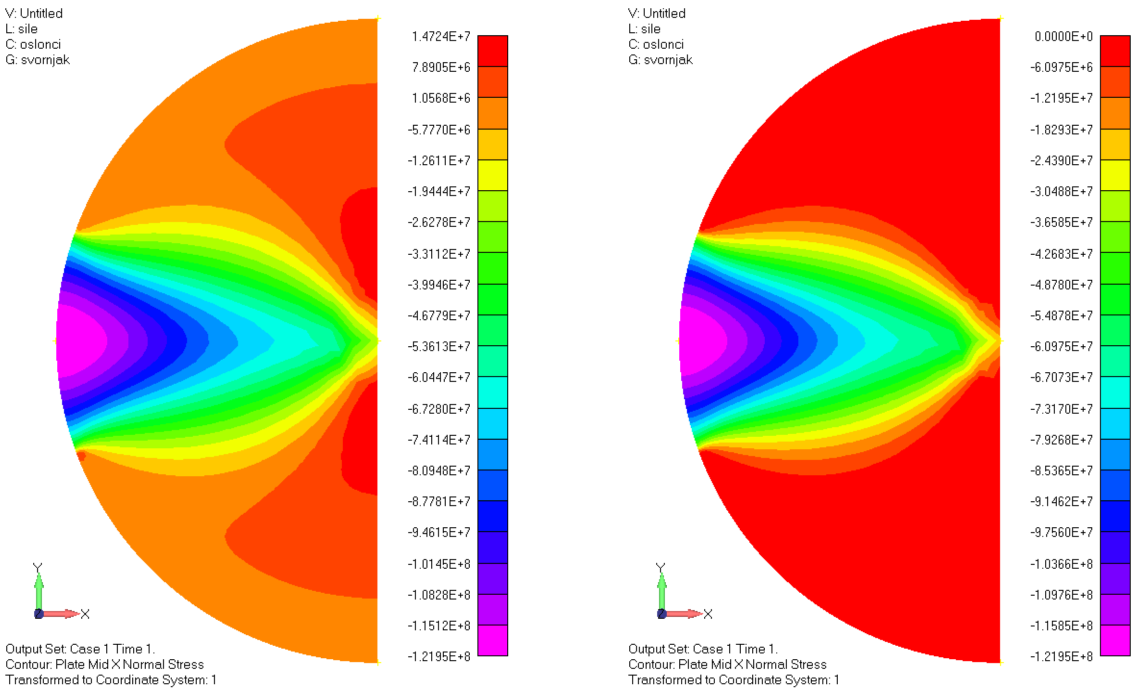
Svornjak i ploča od istog su materijala sa svojstvima: E = 200 GPa, ν = 0,3. Za geometriju modela vrijedi $R = 1$ te $H/B = 2$ i $B/R = 10$, a opterećenje je uzeto kao $\sigma = 0{,}001E = 200$ MPa. Modelirana je lijeva polovica zadane geometrije i omrežena s ukupno 12 683 elementa povezanih u 13 092 čvora. Kontakt dvaju tijela definiran je jednim slide line elementom koji sadrži sve čvorove na polukružnoj konturi svornjaka i provrta ploče; pritom su čvorovi na svornjaku definirani kao master čvorovi, a na ploči kao slave čvorovi. Polukružne kontaktne površine na oba su tijela omrežene sa po 200 konačnih elemenata, čije su dimenzije parametrizirane na način da su razmaci čvorova uz sjecište s horizontalnom simetralom (nacrtanom na slici 19) dvostruko manji od razmaka dvaju krajnjih čvorova na vrhu i dnu polukružnica. Donji rub ploče spriječen je u translaciji po osi y, a u krajnjem desnom čvoru i po osi x, dok je duž desnog ruba definiran uvjet simetrije s obzirom na os x.

Na slici 20 prikazan je uvećani detalj mreže konačnih elemenata u blizini svornjaka.



Sl. 20. Detalj mreže u blizini kontaktne površine svornjaka i ploče

Na slici 21 dan je konturni prikaz naprezanja u svornjaku, na temelju kojih je lako uočiti kontaktni kut φ na jednoj polovici konture svornjaka.



a) b)

Sl. 21. Konturni prikaz normalnih naprezanja σ_r [Pa] u cilindričnom koordinatnom sustavu za svornjak; a) za puni raspon dobivenih vrijednosti, b) raspon s maksimumom u nuli

Dvije najvažnije veličine od dobivenih rezultata analize jesu kontaktni kut i vrijednost maksimalnog kontaktnog pritiska koji su u tablici 3 uspoređeni s rezultatima koje je dobio Man [2]. Pritom vrijednost kontaktnog pritiska odgovara vrijednosti normalnog naprezanja σ_r u cilindričnim koordinatama na rubu svornjaka, odnosno na polumjeru $R = 1$.

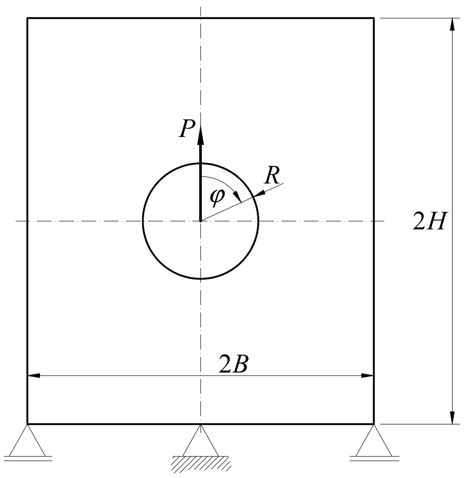
Tab. 3. Usporedba rezultata za svornjak u opterećenoj ploči

Veličina	*Dobiveni rezultat*	*Man [2]*
kontaktni kut	$\boldsymbol{2\theta = 0{,}5\varphi \approx 40{,}5°}$	$2\theta = 0{,}5\varphi \approx 38{,}9°$
normalizirani maksimalni kontaktni pritisak	$\boldsymbol{p_{n,max} \approx 0{,}61\sigma}$	$p_{n,max} \approx 0{,}63\sigma$

Iz prikazane je usporedbe vidljivo kako se dobiveni rezultati dobro slažu s rezultatima iz literature [2]. Isto je tako važno napomenuti kako bi se rezultati slagali neovisno o zadanom intenzitetu opterećenja, o kojemu u ovakvom problemu ovise isključivo apsolutne vrijednosti kontaktnih pritisaka i naprezanja u dvama tijelima.

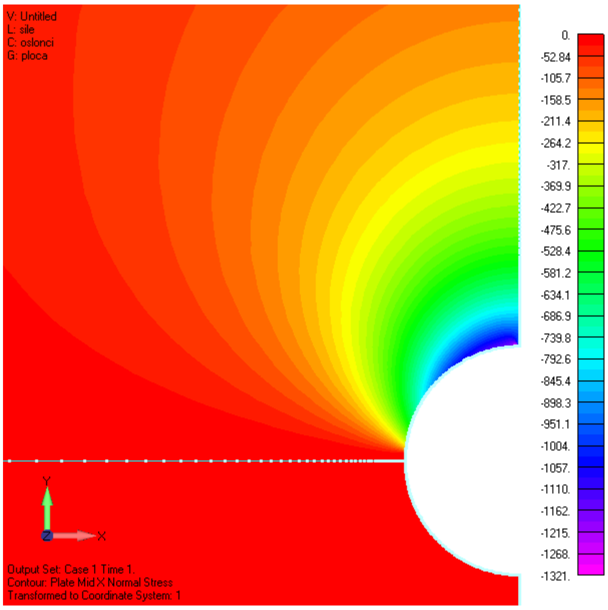
4.1.2. Opterećeni svornjak u provrtu ploče

U ovom je slučaju uzeta geometrija identična kao i u prethodnom slučaju, uz temeljnu razliku što ploča na svojim rubovima nije opterećena, a svornjak je u svom središtu opterećen koncentriranom silom $P = 1000$ N. Zadani je problem prikazan na slici 22.



Sl. 22. Problem opterećenog svornjaka u provrtu ploče

Korištena je ista mreža kao i u prethodnom primjeru iz poglavlja 4.2.1, uz ista ograničenja slobode gibanja. Analogno slici 21, konturni prikaz normalnog naprezanja na osi polumjera cilindričnog koordinatnog sustava prikazan je na slici 23, a usporedba dobivenog kontaktnog polukuta s nekim rezultatima iz literature dana je u tablici 4. I u ovom je slučaju rezultat kvalitativno neovisan o intenzitetu opterećenja.



Sl. 23. Konturni prikaz normalnih naprezanja σ_r [Pa] u cilindričnom koordinatnom sustavu za ploču; maksimum je postavljen na nultu vrijednost radi isticanja kontaktnog kuta

Tab. 4. Usporedba rezultata za opterećeni svornjak u ploči

	Dobiveni rezultat	*Iyer [51]**	*Hou i Hills [52]*
kontaktni kut	$\boldsymbol{\theta = 0{,}5\,\varphi \approx 86°}$	$\theta = 0{,}5\,\varphi \approx 85{,}5°$	$\theta = 0{,}5\,\varphi \approx 84°$

* analiza za stanje ravninskog naprezanja

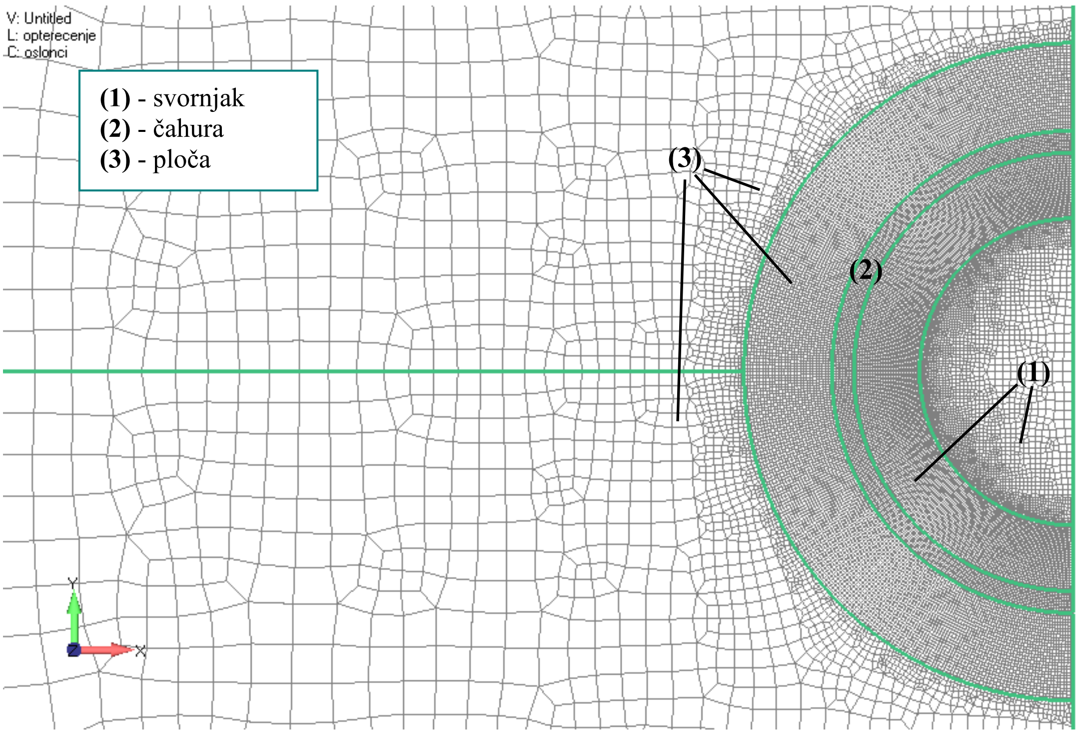
Dobiveni se rezultat dobro slaže s rezultatima u literaturi, a razlika rješenja nije velika čak niti između analiza koje se razlikuju u svojim temeljnim pretpostavkama, poput slučaja za stanje ravninskog naprezanja u odnosu na stanje ravninske deformacije.

4.2. Svornjak u ploči s čahurom

Problem smanjivanja kontaktne površine u slučaju kada između svornjaka i ploče postoji i treće tijelo, poput čahure, nije po autorovim saznanjima dobio gotovo nikakvu pozornost u literaturi. Usprkos tome, ovaj problem ima svoju praktičnu važnost u tehničkoj praksi, s obzirom da se konstrukcijski elementi poput čahura često koriste kao reparaturni elementi u rastavljivim spojevima raznih vrsta. Jednako tako može ih se susresti i kao konstrukcijom predviđen element, kao na primjer kod svornog spoja klipa i ojnice (klipnjače) u motorima s unutrašnjim izgaranjem, što je problem kojega su se u kontekstu kontaktnog problema sa smanjenjem kontaktne površine dotakli Ciavarella, Baldini i dr. [55]. Prisutnošću trećeg tijela u kontaktu, ovaj problem postaje u određenoj mjeri sličan problemu utiskivača, sloja i podloge.

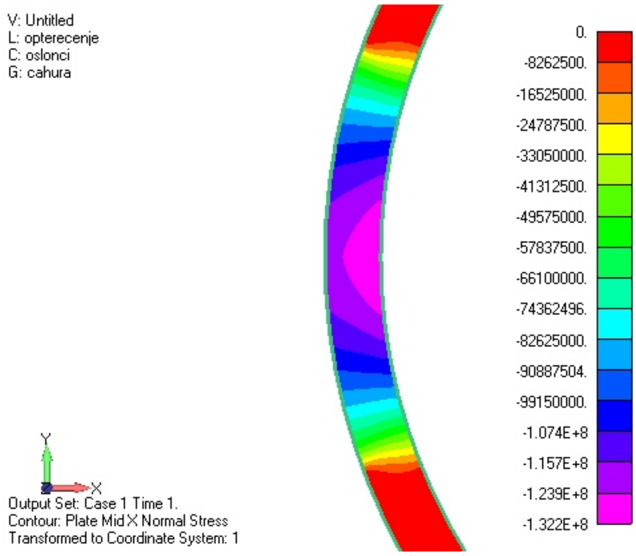
Za što potpuniju karakterizaciju ove vrste problema potrebno je razmotriti utjecaj intenziteta opterećenja, utjecaj različitih kombinacija svojstava materijala, utjecaj različitih geometrijskih konfiguracija te utjecaj trenja. *Referentna analiza* za svaku je geometriju napravljena za slučaj istih svojstava materijala svih triju komponenti u dodiru (E = 200 GPa, ν = 0,3). Pritom je geometrija varirana isključivo mijenjanjem debljine D čahure, dok su gabariti svornjaka i ploče držani konstantnima, i to na vrijednostima dimenzija modeliranima u prethodna dva primjera obrađena u poglavljima 4.1.1 i 4.1.2. Modeli su opterećeni kao i primjer u poglavlju 4.1.1 sa svornjakom u opterećenoj ploči. Za sve analizirane modele, slijedom rečenoga, vrijedi: $R = 1$, $H/B = 2$ i $B/R = 10$, uz opterećenje $\sigma = 200$ MPa. Analizirane su geometrije kojima omjer D/R poprima vrijednosti 0,1, 0,2, 0,5 i 1.

Pri modeliranju geometrije i pripremi numeričkih modela posebna pažnja posvećena je strukturiranju mreže kako bi se istovremeno zadovoljilo nekoliko kriterija: dovoljna gustoća mreže u zonama kontakta, zadovoljavajuća pravilnost oblika elemenata (naročito u okolini kontaktnih zona) te kako bi se pravilnom promjenom gustoće mreže ukupan broj elemenata zadržao u razumnim granicama. Iz tog su razloga ploča i svornjak podijeljeni u više međusobno povezanih površina. Detalj geometrije i mreže u okolici čahure takvog modela za polaznu geometriju (D/R = 0,1) prikazan je na slici 24.



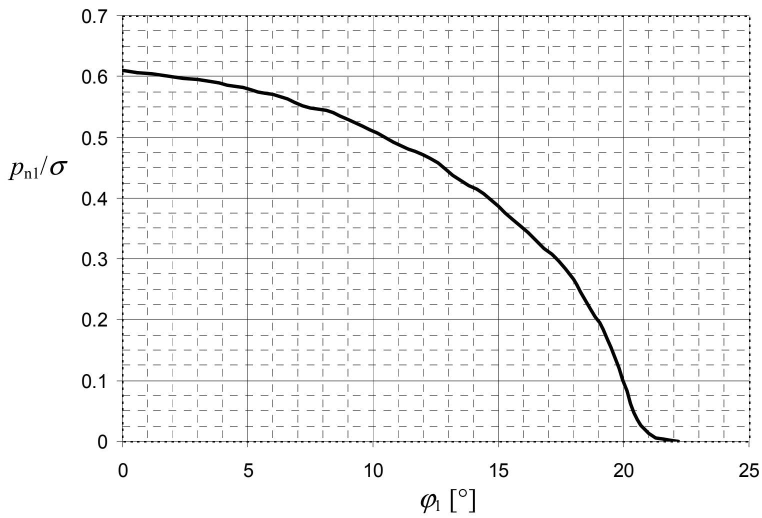
Sl. 24. Detalj mreže konačnih elemenata uz čahuru i svornjak za D/R = 0,1; model ima ukupno 27924 elementa i 28660 čvorova

Na slici 25 dan je konturni prikaz vrijednosti normalnih naprezanja na osi polumjera cilindričnog koordinatnog sustava.

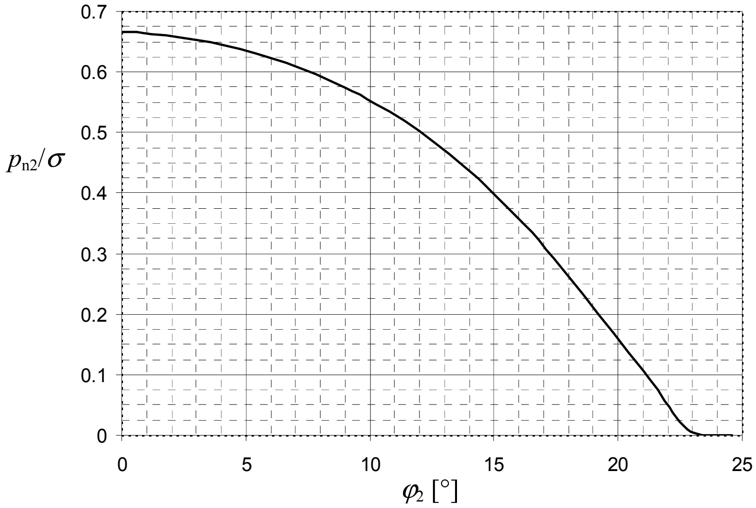


Sl. 25. Konturni prikaz normalnih naprezanja σ_r [Pa] na smjeru osi polumjera u cilindričnom koordinatnom sustavu na detalju čahure

Vrijednosti normalnih kontaktnih pritisaka iz numeričkog se modela dobivaju ispisom čvornih vrijednosti naprezanja σ_r (u cilindričnom koordinatnom sustavu) na elementima koji se nalaze na kontaktnim površinama. Kontaktni pritisak javlja se između ploče i čahure (p_{n1}) te između čahure i svornjaka (p_{n2}) pa do smanjenja kontaktne površine uslijed deformacija dolazi u oba slučaja. Raspodjele normalnih kontaktnih pritisaka u bezdimenzijskoj formi za dvije površine prikazane su na slikama 26 i 27.



Sl. 26. Raspodjela kontaktnih pritisaka između ploče i čahure; $p_{n1,max}/\sigma \approx 0,61$, $\varphi_1 \approx 22°$



Sl. 27. Raspodjela kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka;
$p_{n2,max}/\sigma \approx 0,666$, $\varphi_2 \approx 23,4°$

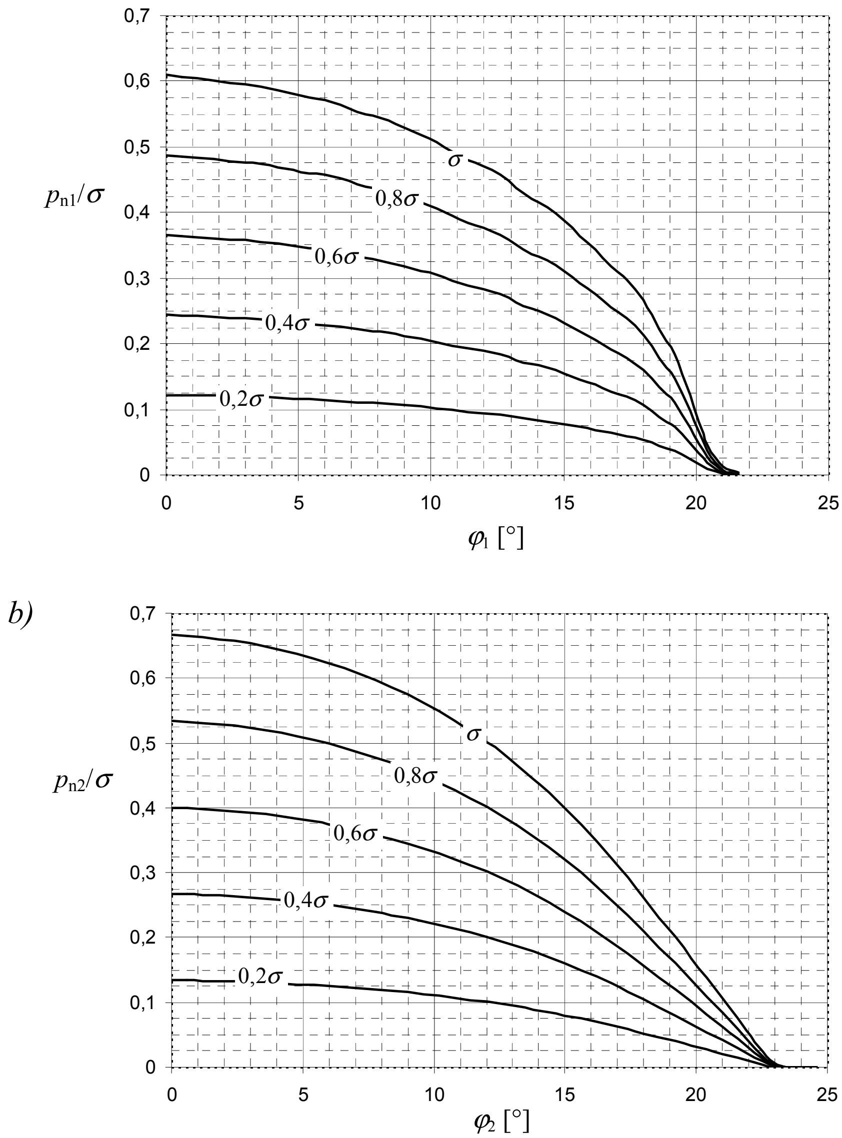
Na temelju dijagrama sa slika 26 i 27 može se uočiti važna činjenica da se u kontaktu svornjaka i čahure mogu javiti veće vrijednosti i za kontaktni kut i za maksimalnu vrijednost normaliziranog kontaktnog pritiska. Ovo je u stanovitoj mjeri neobičan rezultat, koji se može činiti i pogrešnim, s obzirom da na većoj kontaktnoj površini u većini kontaktnih problema statički ekvivalentna opterećenja moraju proizvesti raspodjele kontaktnih pritisaka s manjim vršnim vrijednostima, odnosno raspodjela kontaktnih pritisaka se sa širenjem kontaktne zone u pravilu spljoštava. Razlog ovoj pojavi treba, međutim, tražiti u činjenici da se kontakna površina između čahure i svornjaka *nalazi na manjem polumjeru*, što dovodi do efektivno manje kontaktne površine usprkos većem kontaktnom kutu. Veća vrijednost kontaktnog kuta može navesti na pogrešan zaključak da i kontaktna površina nužno mora biti i fizički veća, premda to ovdje nije slučaj. Za ovu je geometrijsku konfiguraciju kontaktna površina između ploče i čahure 3-3,5% veća od kontaktne površine između čahure i svornjaka.

Detaljnija karakterizacija ponašanja različitih geometrija u odnosu na dosad izložene rezultate bit će objedinjena u razmatranju utjecaja intenziteta opterećenja i utjecaja promjene geometrijske konfiguracije.

4.2.1. Utjecaj intenziteta opterećenja i geometrije strukture

Utjecaj intenziteta opterećenja na promjenu kontaktnih veličina očituje se u svojoj izravnoj povezanosti s pomacima i deformacijama, o kojima ovise veličine dvaju kontaktnih kutova. Na slici 28 za slučaj istih materijala svih triju komponenti i za geometriju $D/R = 0,1$ objedinjeno su prikazane raspodjele kontaktnih pritisaka za niz stupnjevanih opterećenja $\sigma_{s.o.}$ u rasponu vrijednosti od $0,2\sigma$ do σ u koracima po $0,2\sigma$.

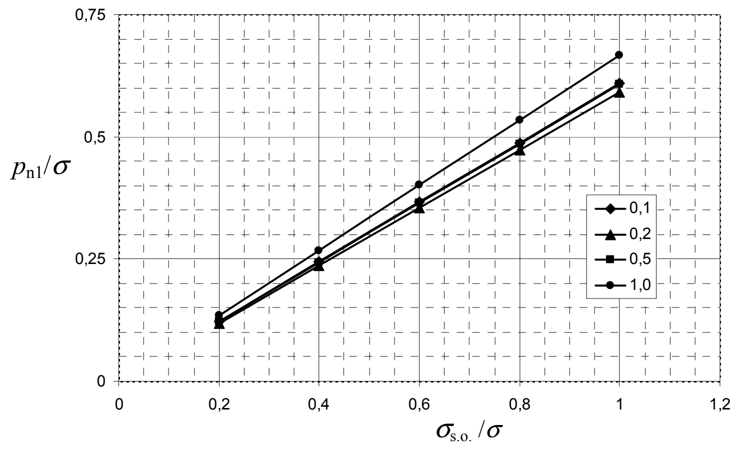
a)



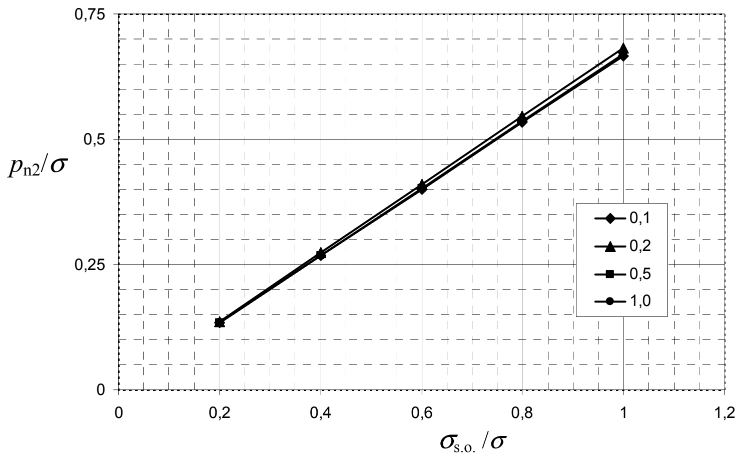
Sl. 28. Rezultati za različite stadije opterećenja za D/R = 0,1; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između ploče i čahure, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka

Dijagrami raspodjela kontaktnih pritisaka za preostale geometrije kvalitativno su vrlo slični rezultatima sa slike 28 i sadržani su u prilogu C.1. Za svaku pojedinu geometriju općenito može se konstatirati postojanje linearne zavisnosti kontaktnih pritisaka o primijenjenom vanjskom opterećenju te iznimno slab utjecaj na promjenu kontaktnih kutova, koji s opterećenjem ostaju otprilike konstantni, što je prikazano na slikama 29-31. Treba naglasiti, međutim, da na dobivene vrijednosti kontaktnih kutova, kao i na njihovo određivanje, značajan utjecaj ima i numerička greška. Vrijednosti naprezanja na rubovima kontaktne površine vrlo često zapravo ne iščezavaju u potpunosti, već se po velikom kutu postupno smanjuju i zadržavaju se na vrlo malim vrijednostima koje su nekoliko redova veličine manje (10^3-10^5 puta) od maksimalnih kontaktnih pritisaka. U nekim modelima vrijednosti i osciliraju između vrlo malih pozitivnih i negativnih vrijednosti. Iz navedenih razloga u većini modela nije moguće apsolutno točno odrediti kontaktni kut.

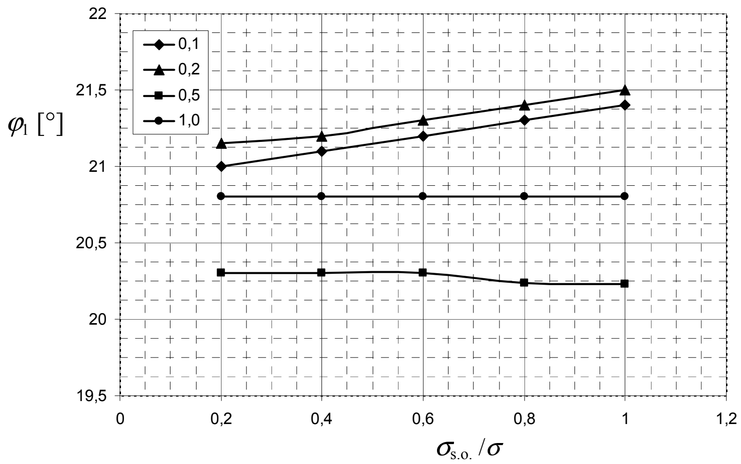
a)



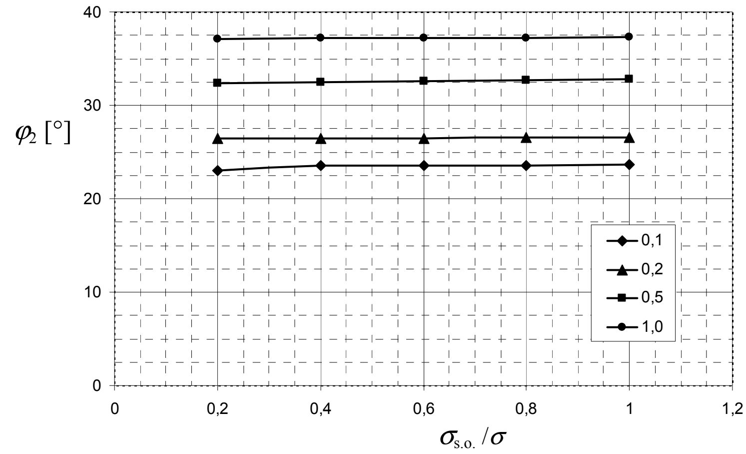
b)



Sl. 29. Utjecaj intenziteta opterećenja na vrijednosti maksimalnih kontaktnih pritisaka za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer D/R



Sl. 30. Utjecaj intenziteta opterećenja na vrijednosti kontaktnog kuta φ_l za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer D/R



Sl. 31. Utjecaj intenziteta opterećenja na vrijednosti kontaktnog kuta φ_2 za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer D/R

Iz dijagrama prikazanih na slikama 30 i 31 vidljivo je da su promjene kontaktnih kutova ili u potpunosti izostale ili su vrlo malene. U niti jednom slučaju promjena kontaktnog kuta ne prelazi apsolutnu vrijednost od 0,4°, što odgovara relativnom odstupanju od otprilike 1,9%.

4.2.2. Utjecaj svojstava materijala

Nakon referentne analize (isti materijal) za svaku su geometriju pojedinačno varirana svojstva materijala za ploču, čahuru i svornjak prema vrijednostima danima u tablici 5. Pritom su za svaku kombinaciju svakog tijela elastična svojstva druga dva tijela ostavljena na svojim referentnim vrijednostima.

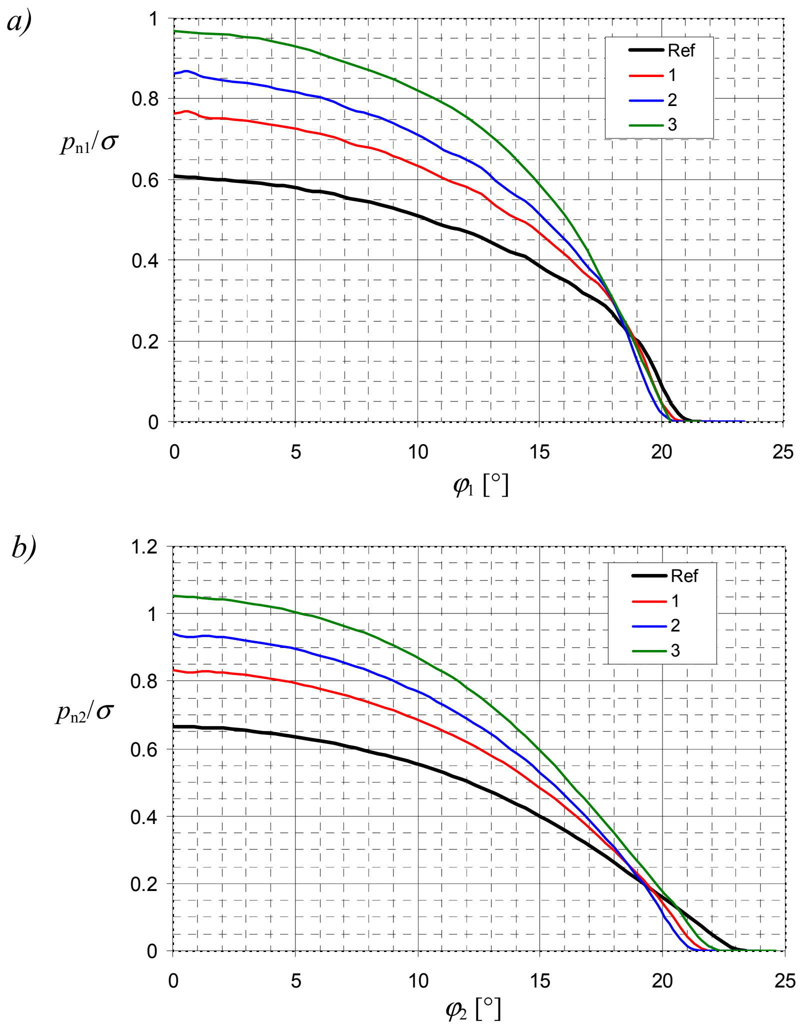
Tri kombinacije vrijednosti modula elastičnosti i Poissonova broja za tri različita tijela daju ukupno devet mogućih analiza u kojima se za određenu geometriju može ispitati utjecaj promjene elastičnih svojstava na iznos kontaktnog kuta i raspodjele kontaktnih pritisaka. Sve moguće kombinacije materijala ipak nisu ispitane za sva tijela, niti u svim modelima, jer je pri najmanjoj vrijednosti modula elastičnosti u nekim slučajevima dolazilo do vrlo loših rješenja i pogrešne konvergencije, moguće zbog vrlo velike podatljivosti strukture.

Tab. 5. Analize s različitim vrijednostima elastičnih konstanti

Veličina	*Analiza 1*	*Analiza 2*	*Analiza 3*
Modul elastičnosti, E [GPa]	110	70	3
Poissonov broj, ν	0,32	0,335	0,36

Vrijednosti modula elastičnosti i Poissonova broja u tablici 5 za analize 1, 2 i 3 odgovaraju svojstvima karakterističnima za titanij, aluminij i epoksidni materijal [51].

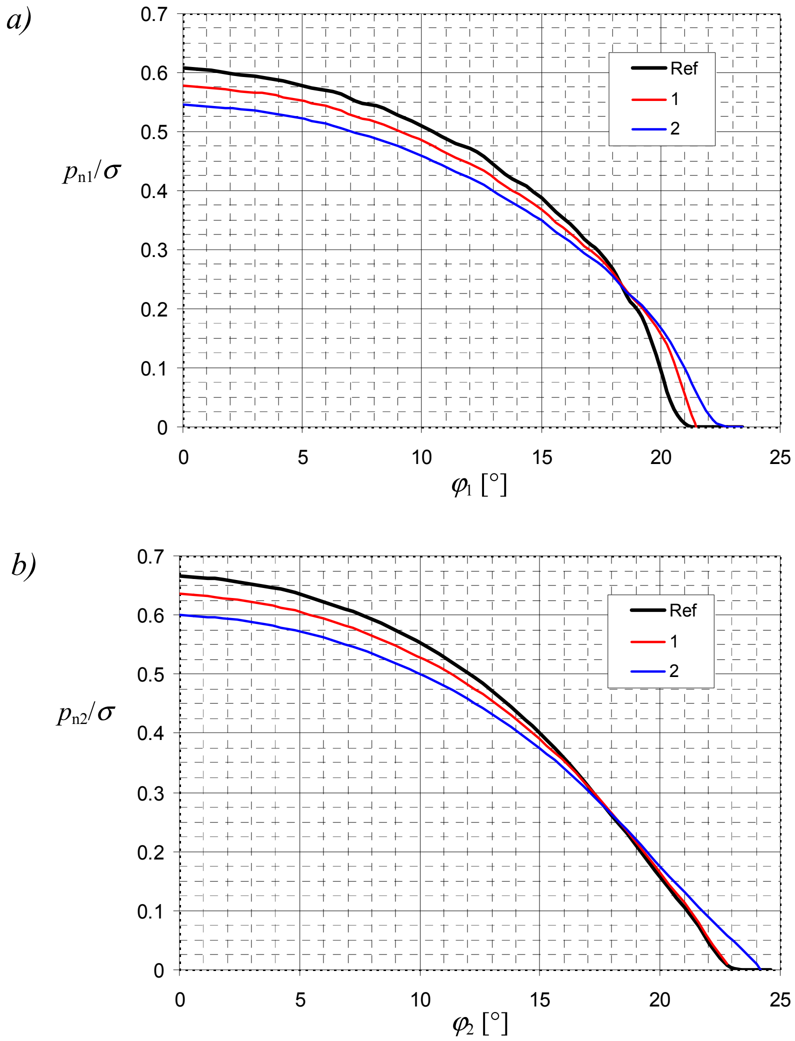
Za slučaj variranja elastičnih svojstava geometrijske konfiguracije D/R = 0,1 raspodjele kontaktnih pritisaka prikazane su na slikama 32-34. Na svim su slikama prikazane i referentne raspodjele, koje na slici 28 odgovaraju slučaju maksimalnog opterećenja. Brojčane oznake krivulja na slikama odnose se na oznake analiza navedenih u tablici 5, a oznaka „*Ref*“ na referentnu analizu.



Sl. 32. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava ploče; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između ploče i čahure, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka

Vidljivo je da s opadanjem mehaničkih svojstava materijala ploče na obje kontaktne površine dolazi do stanovitog povećanja kontaktnog kuta i značajnog porasta kontaktnih pritisaka. Uzrok ovoj naizgled neobičnoj pojavi leži u činjenici da podatljivost ploče raste s opadanjem njenih mehaničkih svojstava, a s povećanjem podatljivosti povećavaju se i pomaci ploče, kako na smjeru djelovanja vanjskog opterećenja, tako i na poprečnom smjeru. Upravo vrijednosti poprečnih pomaka određuju kolika će se ukupna sila za zadano opterećenje prenositi na čahuru i svornjak, jer će za konstantnu vrijednost vanjskog opterećenja kontaktni pritisci biti različiti ukoliko se deformacijsko ponašanje dviju geometrijski jednakih struktura razlikuje.

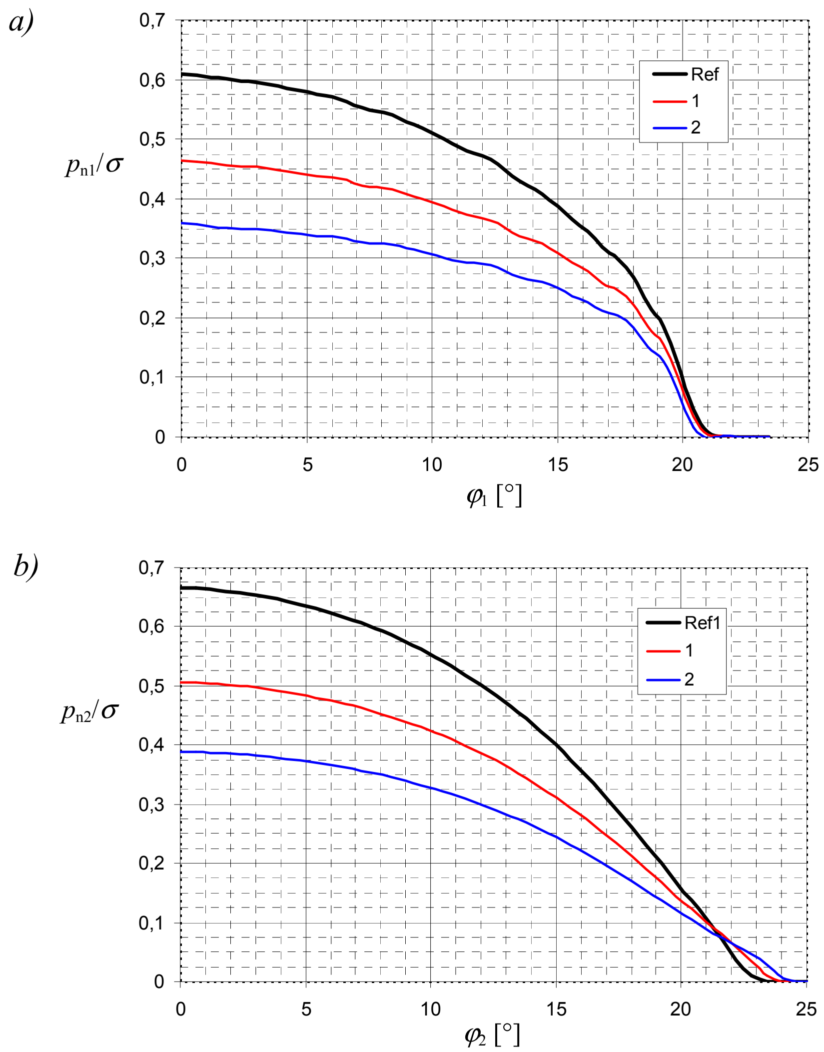
Za slučaj variranja elastičnih svojstava čahure, rezultati su, analogno analizi utjecaja ploče, za prve dvije analize prikazani na slici 33.



Sl. 33. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava čahure; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između ploče i čahure, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka

Na temelju slike 33 može se zaključiti kako s padom modula elastičnosti materijala čahure dolazi i do pada kontaktnih pritisaka na obje kontaktne površine, uz malu promjenu kontaktnog kuta na obje kontaktne površine.

Za slučaj promjene elastičnih svojstava svornjaka rezultati su prikazani na slici 34.



Sl. 34. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava svornjaka; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između ploče i čahure, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka

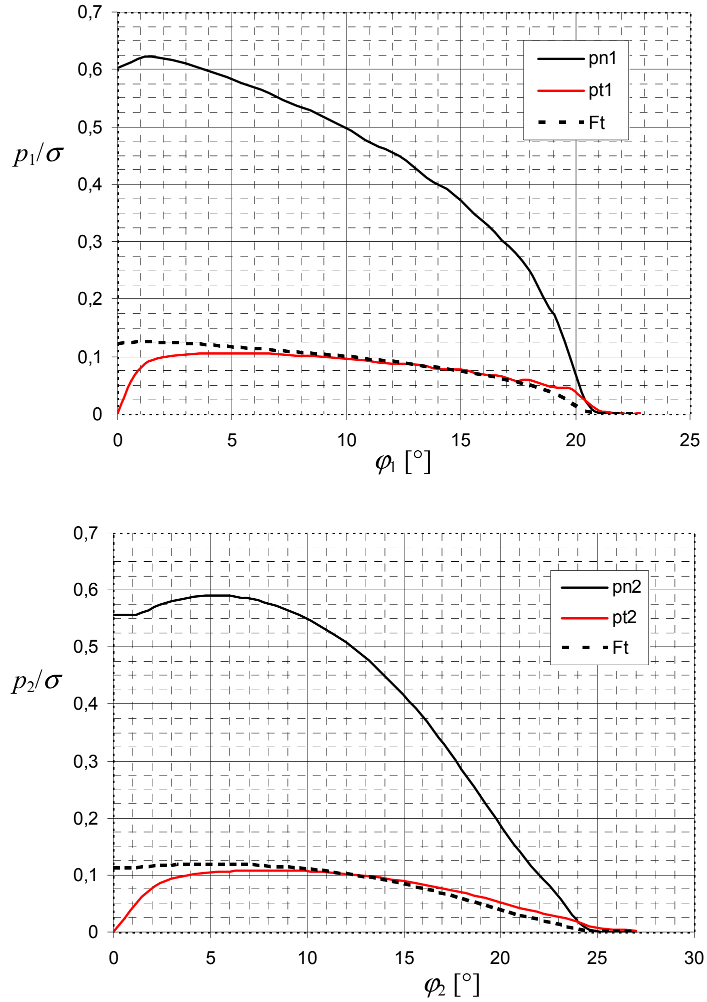
Utjecaj mehaničkih svojstava materijala svornjaka kvalitativno se podudara s utjecajem materijala čahure, uz nešto naglašeniji utjecaj na smanjenje vrijednosti kontaktnih pritisaka, ali uz još manje izraženu promjenu kontaktnih kutova. Dijagrami raspodjela kontaktnih pritisaka za preostale geometrije kvalitativno su slični rezultatima sa slika 32-34 i sadržani su u prilogu C.2.

4.2.3. Kontaktni problem s trenjem

Utjecaj trenja za sve je ispitane geometrije modeliran za referentni slučaj kombinacije materijala, pri čemu je uzet koeficijent trenja μ = 0,2. Na slikama 35-38 prikazane su raspodjele normalnih i tangencijalnih kontaktnih pritisaka na obje kontaktne površine i za sve geometrije. Na svim je dijagramima crtkanom linijom prikazana i raspodjela intenziteta sile trenja F_T u skladu s Coulombovim modelom, koji je bio pretpostavljen u simulacijama.

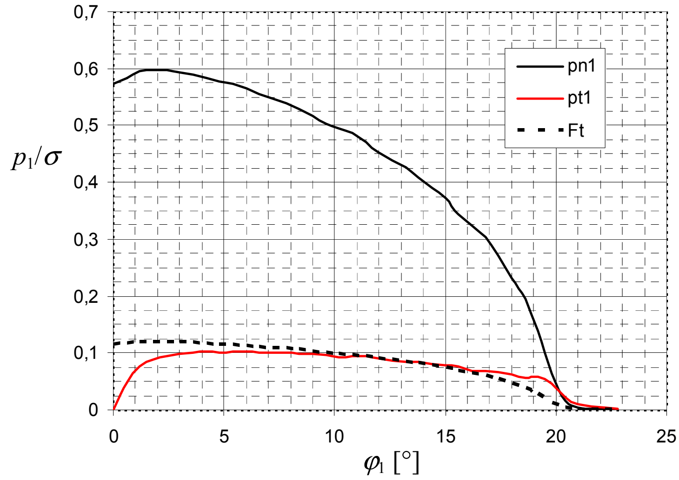
a)

b)



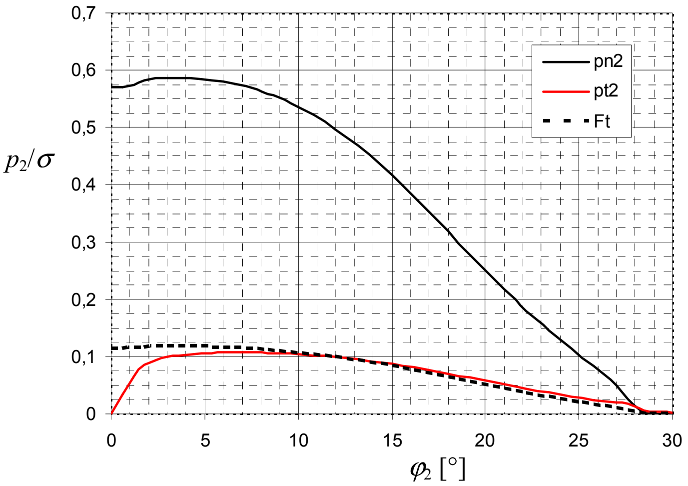
Sl. 35. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju D/R = 0,1; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između ploče i čahure, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između čahure i svornjaka

a)



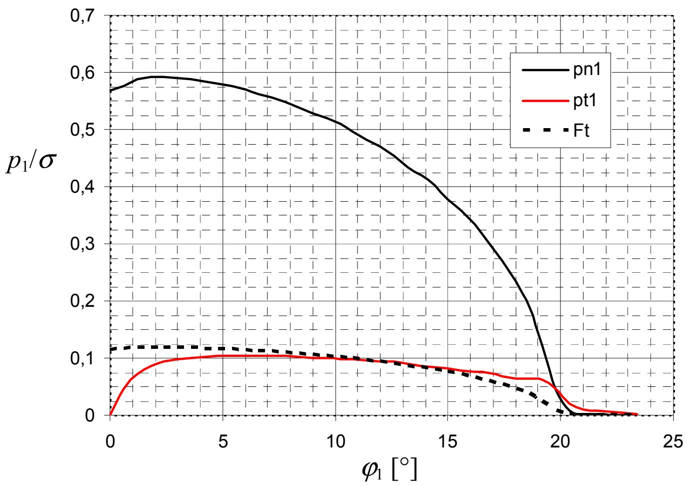
Sl. 36. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju D/R = 0,2; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između ploče i čahure, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između čahure i svornjaka

b)

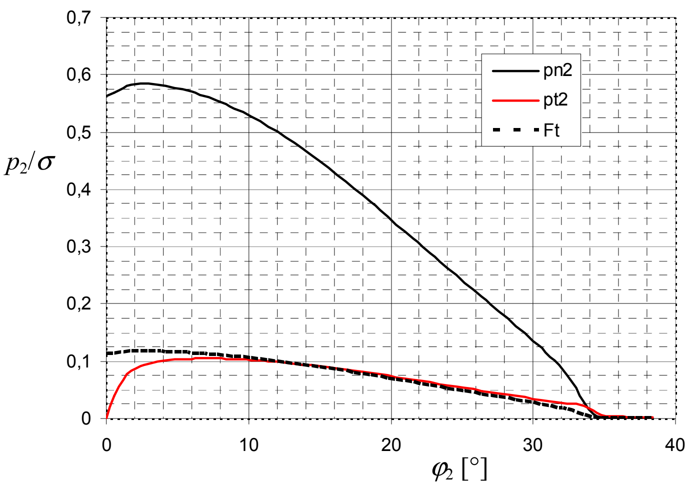


Sl. 36. Nastavak na Sl. 36.a s prethodne stranice

a)

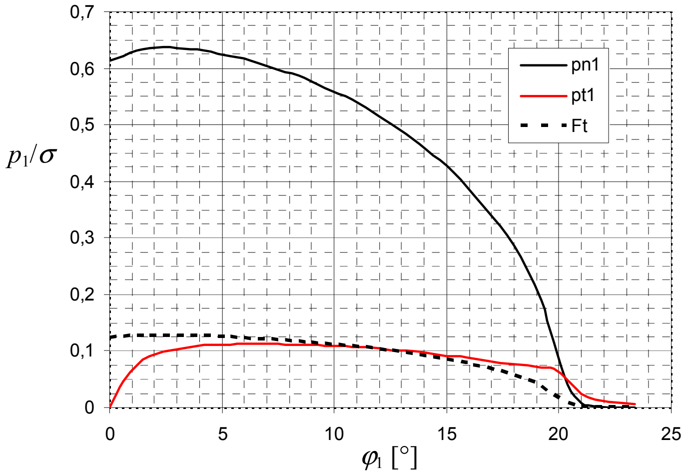


b)

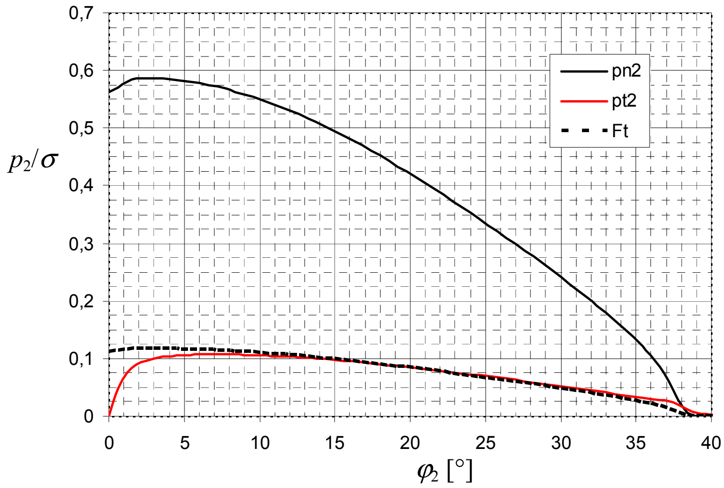


Sl. 37. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju D/R = 0,5; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između ploče i čahure, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između čahure i svornjaka

a)



b)



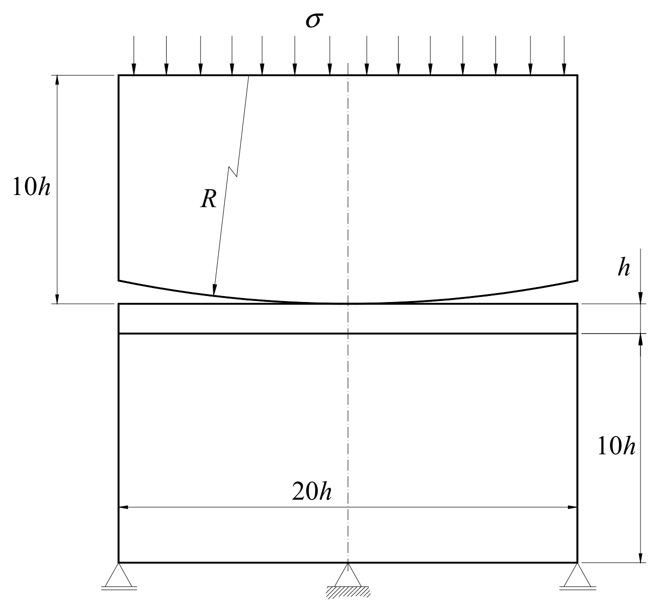
Sl. 38. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju D/R = 1; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između ploče i čahure, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između čahure i svornjaka

Na dobivenim je dijagramima vidljiva tendencija ekscentričnog pomicanja maksimuma normalnih kontaktnih pritisaka kada se u obzir uzima trenje, što je uobičajena pojava kod ovakve vrste kontakta. Zone prianjanja (gdje su posmične sile manje od sile trenja) nalaze se u središnjem dijelu kontakte površine, koja je omeđena rubnim zonama klizanja, što je također u skladu s konvencionalnim rezultatima koje se široko susreće u literaturi.

Na dobivenim se dijagramima također može uočiti zona uz rub kontaktne površine, gdje su tangencijalni kontaktni pritisci zamjetno veći od sile trenja, što je protivno pretpostavci Coulombova modela. Takav rezultat u tom dijelu modela nije dobar i očito je uzrokovan numeričkom greškom, koja je najvjerojatnije posljedica temeljnog koncepta penalty metode u kojoj određen iznos „prodora“ uvijek postoji. Vidljivo je da je ta pogreška naglašenija na prvoj kontaktnoj površini između ploče i čahure.

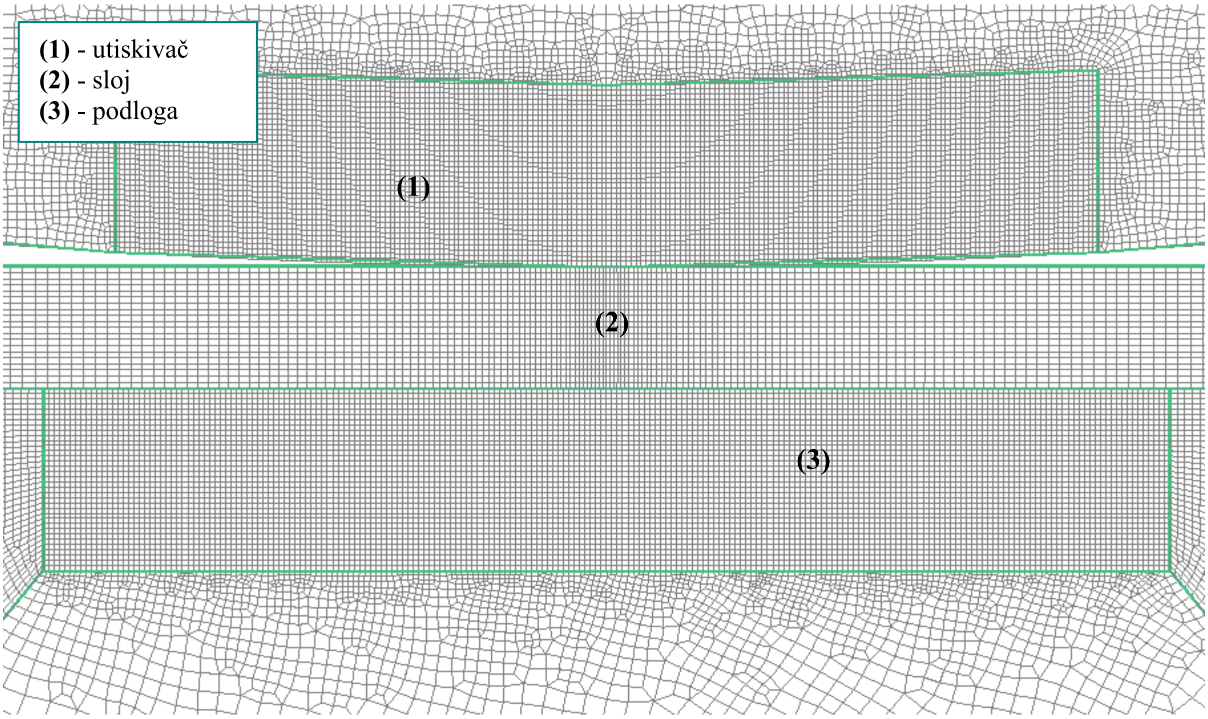
4.3. Problem utiskivača, sloja i podloge

U svim obrađenim problemima korišteni su dvodimenzionalni četverokutni konačni elementi namijenjeni analizi ravninskog stanja deformacije (eng. *plane strain*). Materijal je pretpostavljen kao izotropan i linearno elastičan i korištena je nelinearna statička analiza. Analize su za ovu skupinu problema napravljene za slučaj opterećenja utiskivača jednoliko raspodijeljenim opterećenjem σ = 100 MPa koje tlačno djeluje na njegovoj gornjoj površini. Kao i za problem svornjaka, ploče i čahure, i u ovom je slučaju za što potpuniju karakterizaciju problema potrebno razmotriti utjecaje različitih geometrija, različitih kombinacija elastičnih svojstava materijala, utjecaj intenziteta opterećenja te u konačnici i slučaj kada je na kontaktnim površinama prisutno trenje. Pri tome je promjena geometrije kontakta uzeta kao jedan od temeljnih kriterija kroz čiju promjenu se promatraju i ostali navedeni utjecaji. Kako softver Femap ne pruža mogućnost definiranja beskonačnih konačnih elemenata, i podloga i sloj modelirani su s konačnim dimenzijama, pri čemu su te dimenzije nepromijenjene za sve modele. Različite geometrijske konfiguracije dobivene su isključivo variranjem polumjera utiskivača R, zadržavajući njegove ostale dimenzije na istim vrijednostima. Analizirane su geometrije u kojima omjer R/h poprima vrijednosti 50, 100, 200 i 500. *Referentna analiza* za svaku je od četiri geometrije napravljena za slučaj istih svojstava materijala svih triju komponenti u dodiru (E = 200 GPa, ν = 0,3). Geometrija i opterećenje zadanoga problema za *polaznu geometriju*, definiranu s R/h = 50, prikazani su na slici 39.

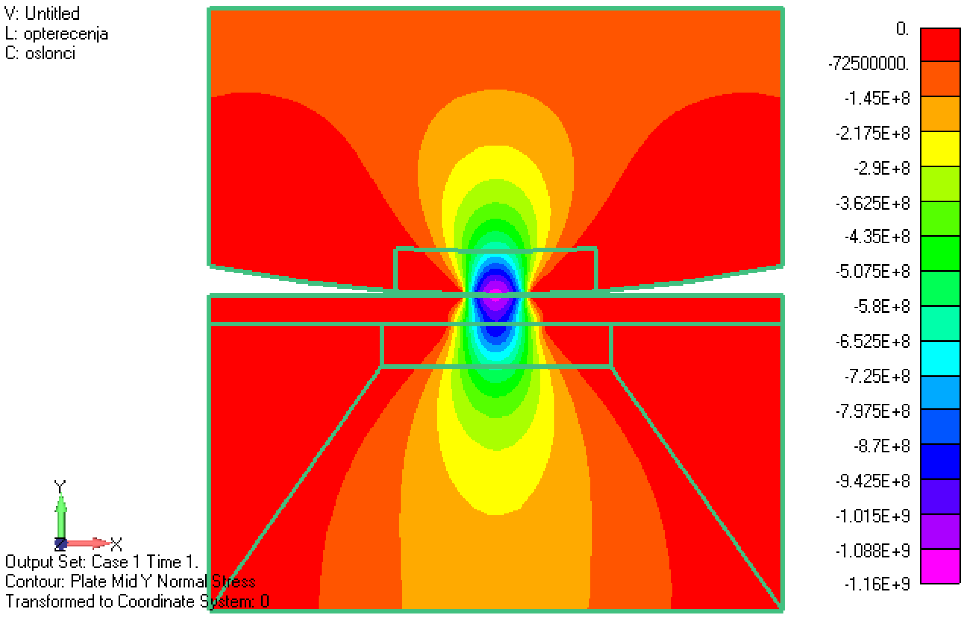


Sl. 39. Problem utiskivača, sloja i podloge

Pri modeliranju geometrije i pripremi numeričkih modela, posebna pažnja posvećena je strukturiranju mreže kako bi se istovremeno zadovoljilo nekoliko kriterija: njena dovoljna gustoća u zonama kontakta, zadovoljavajuća pravilnost oblika elemenata u čitavom modelu te kako bi se u konačnici pravilnom promjenom gustoće mreže ukupan broj elemenata zadržao u razumnim granicama. Detalj mreže u okolici početnih točaka dodira za polaznu geometriju modela prikazan je na slici 40.

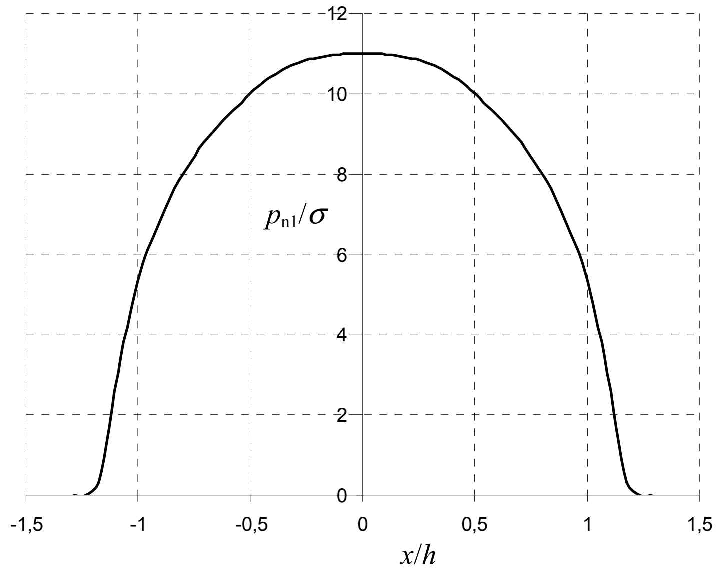


Sl. 40. Detalj mreže u okolici početnih točki dodira; podloga i utiskivač su zbog što pravilnijeg strukturiranja mreže podijeljeni u više od jedne međusobno povezane površine

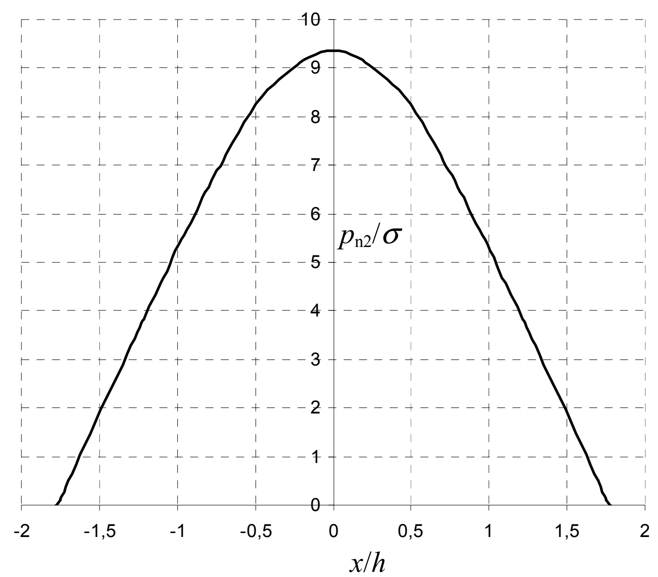


Sl. 41. Konturni prikaz raspodjele normalnog naprezanja σ_y na čitavom modelu za R/h = 50

Vrijednosti normalnih kontaktnih pritisaka iz numeričkog se modela dobivaju ispisom čvornih vrijednosti normalnih naprezanja σ_y na elementima koji se nalaze na kontaktnim površinama. Primjer konturnog prikaza navedenih naprezanja za R/h = 50 dan je na slici 36, pri čemu su zbog zornosti prikazane samo negativne vrijednosti. Raspodjele tako dobivenih kontaktnih pritisaka prikazane su na slikama 42 i 43.



Sl. 42. Raspodjela kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja za R/h = 50;
$p_{n1,max}/\sigma \approx 11$, $a/h \approx 1,29$



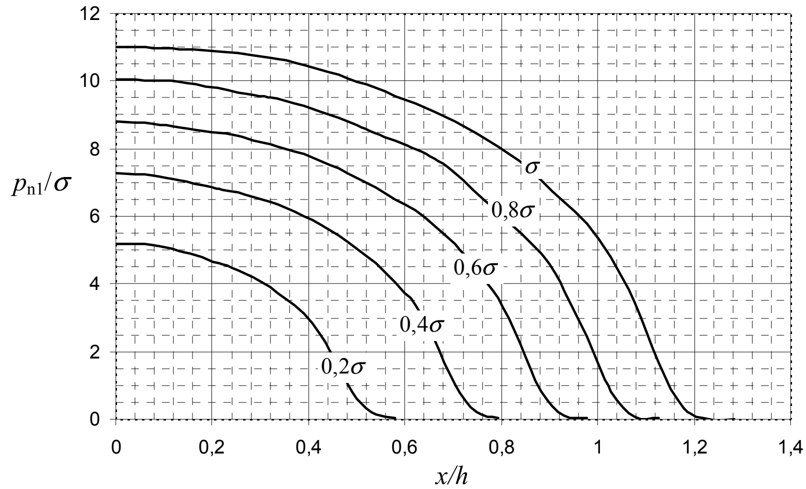
Sl. 43. Raspodjela kontaktnih pritisaka između sloja i podloge za R/h = 50;
$p_{n2,max}/\sigma \approx 9,35$, $b/h \approx 1,78$

Iz dobivenih je dijagrama na slikama 42 i 43 vidljivo da se kontakt između utiskivača i sloja ostvaruje preko uže kontaktne površine na kojoj se javlja veća vrijednost maksimalnog kontaktnog pritiska nego kod kontakta između sloja i podloge. Ovakav rezultat fizikalno je opravdan i kvalitativno se slaže sa zakonitostima kontaktne mehanike i dostupnim rezultatima u literaturi, gdje se smanjenje maksimalnog kontaktnog pritiska i širenje kontaktne površine uvijek javljaju ispod sloja.

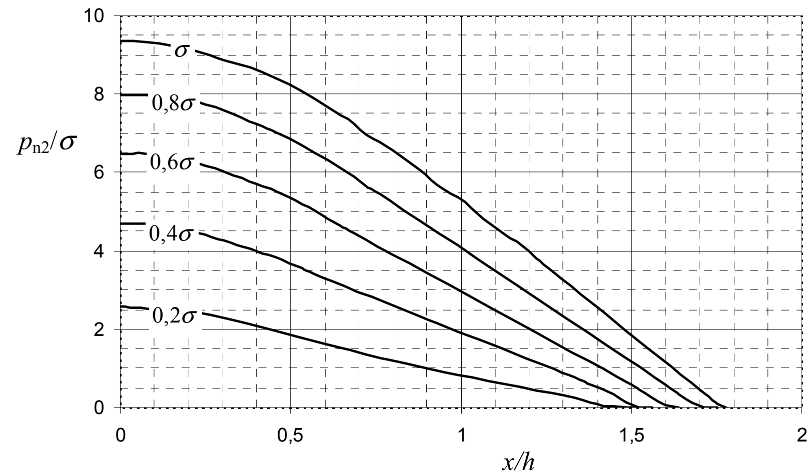
4.3.1. Utjecaj intenziteta opterećenja i geometrije strukture

Na slici 44 za slučaj istih materijala svih triju komponenti i za geometriju $R/h = 50$ objedinjeno su prikazane raspodjele kontaktnih pritisaka za niz stupnjevanih opterećenja $\sigma_{s.o.}$ u rasponu vrijednosti od $0{,}2\sigma$ do σ u koracima po $0{,}2\sigma$.

a)

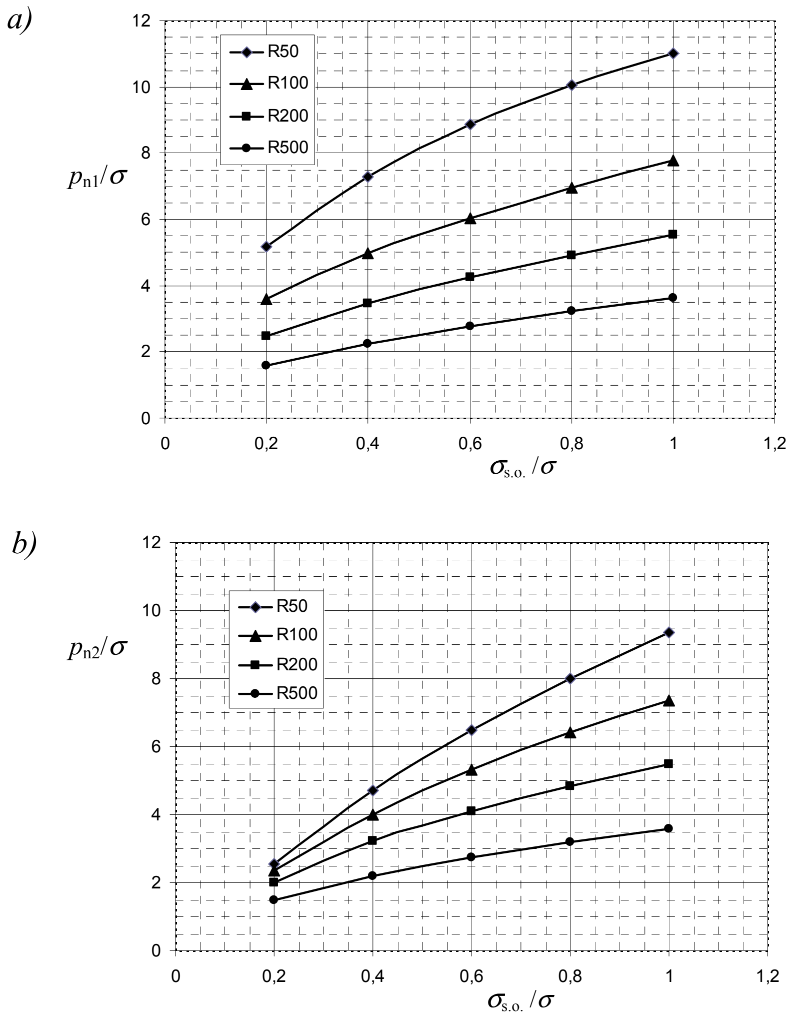


b)



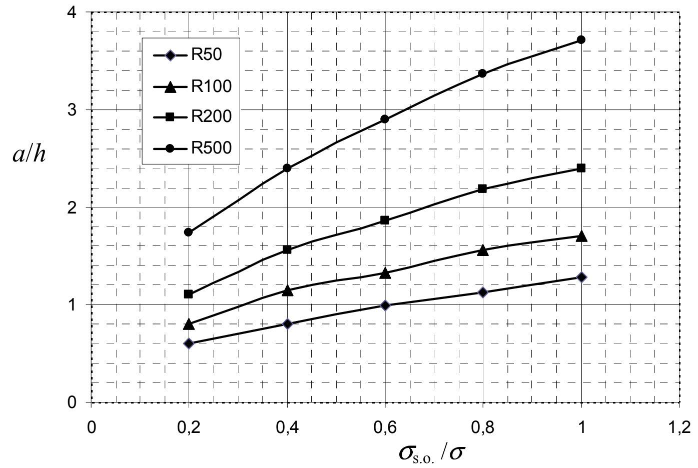
Sl. 44. Rezultati za različite stadije opterećenja za R/h = 50; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između sloja i podloge

Dijagrami raspodjela kontaktnih pritisaka za preostale geometrije kvalitativno su u potpunom slaganju s rezultatima sa slike 44 i sadržani su u prilogu D.1. Za razliku od problema ploče, čahure i svornjaka, kao važan rezultat potrebno je izdvojiti da zavisnost intenziteta kontaktnih pritisaka o porastu vanjskog opterećenja za niti jednu od analiziranih geometrijskih konfiguracija *nije linearna*, što je aspekt koji u kontekstu ove problematike nije po autorovim saznanjima do sada bio istražen u literaturi. Štoviše, u pravilu se u literaturi zavisnost kontaktnih pritisaka problema sa smanjenjem kontaktne površine navodi kao linearno zavisna o vanjskom opterećenju, a kontaktna se površina uzima konstantnom, što nije slučaj ukoliko se u razmatranja uvedu i deformacije utiskivača. Dobivene su krivulje blago nelinearne, kao što se može vidjeti na slici 45, a kontaktna se površina u *značajnoj mjeri mijenja* s opterećenjem, uz blagi trend povećavanja nelinearnosti kako polumjer utiskivača raste, što je prikazano na slici 46.

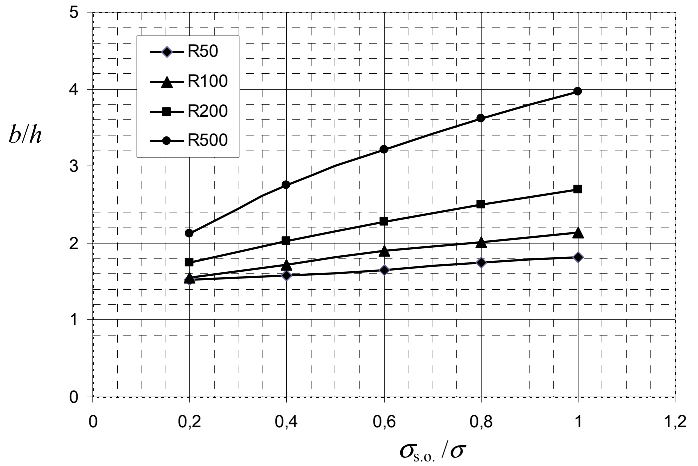


Sl. 45. Utjecaj intenziteta opterećenja na vrijednosti maksimalnih kontaktnih pritisaka za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer R/h

a)



b)



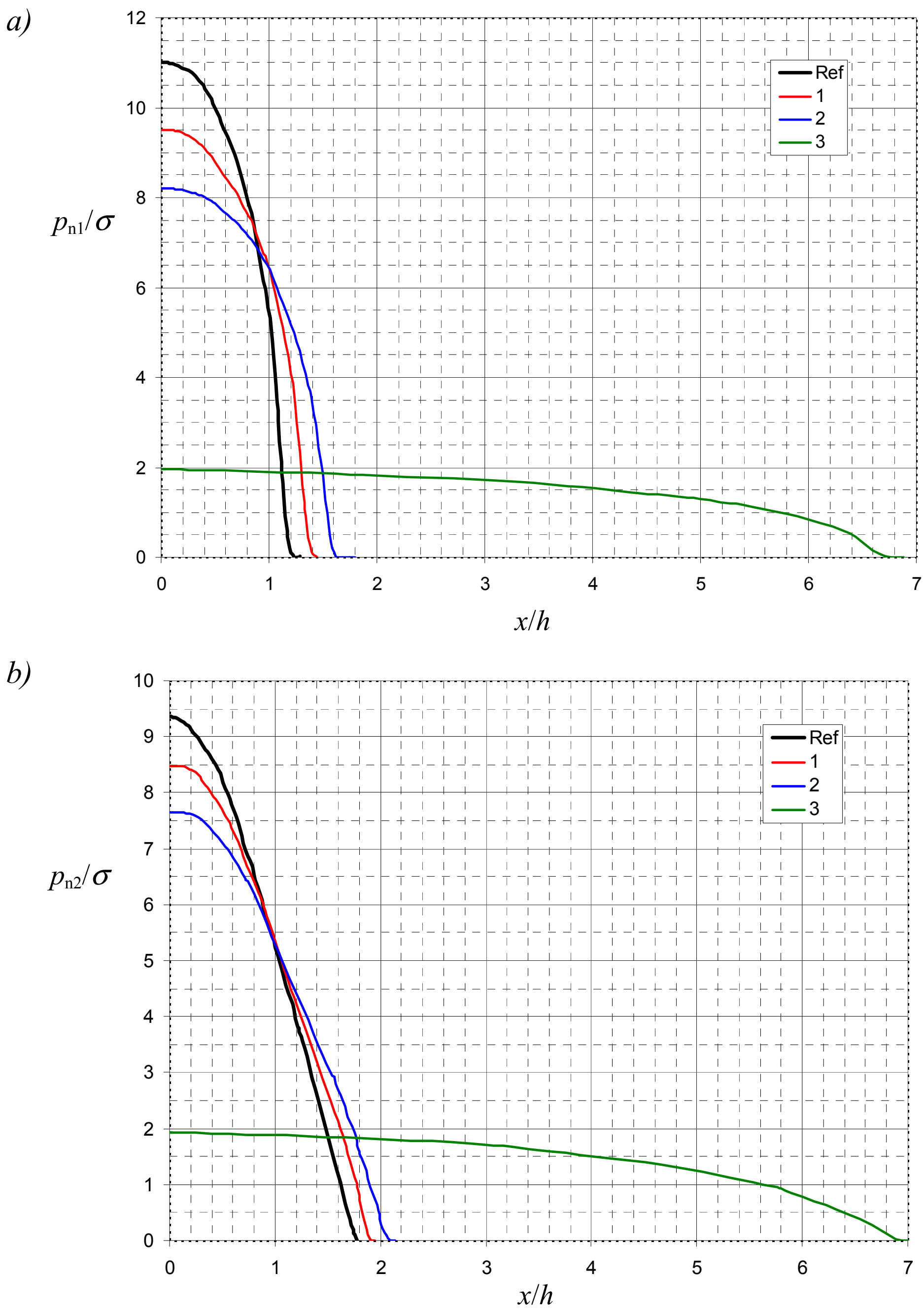
Sl. 46. Utjecaj intenziteta opterećenja na širine kontaktnih površina za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer R/h

Iz dijagrama na slikama 45 i 46 vidljivo je da su promjene kontaktnih površina u relativnim odnosima vrlo značajne te se ovisno o geometrijama za razmatrano stupnjevanje opterećenja mogu mijenjati u rasponu od 25 pa do čak 80%.

4.3.2. Utjecaj svojstava materijala

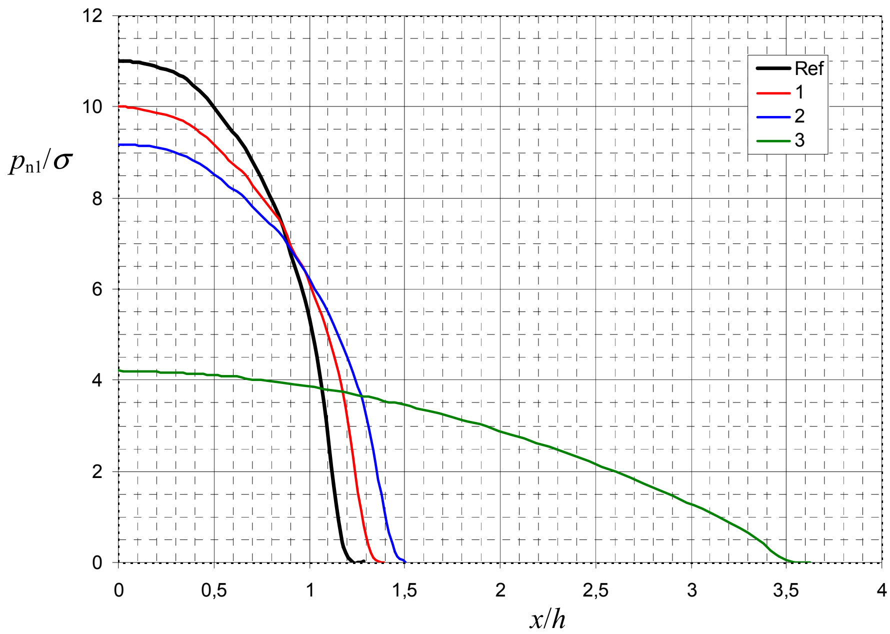
Nakon referentne analize pojedinačno su varirana svojstva materijala za utiskivač, sloj i podlogu, a u obzir su kao i kod slučaja svornjaka i čahure uzimane kombinacije iz tablice 5. Pritom su za svaki navedeni slučaj elastična svojstva druga dva elementa ostavljena na svojim referentnim vrijednostima. Tri kombinacije vrijednosti modula elastičnosti i Poissonova broja za tri različita tijela daju za svaku geometriju ukupno devet mogućih analiza u kojima se može ispitati utjecaj promjene elastičnih svojstava na raspodjele kontaktnih pritisaka i širine kontaktnih površina. Sve moguće kombinacije materijala ipak nisu ispitane za sva tijela, niti u svim modelima, jer je pri najmanjoj vrijednosti modula elastičnosti u nekim slučajevima dolazilo do širenja kontaktne površine na širinu čitavog modela ili pak do vrlo loše i pogrešne konvergencije rješenja, moguće zbog vrlo velike podatljivosti strukture.

Na slikama 47-49 za referentnu su geometriju modela prikazane raspodjele kontaktnih pritisaka za različita svojstva materijala za svako od tijela u kontaktu. Na svakoj je slici prikazana usporedba s referentnim krivuljama, koje odgovaraju slučaju istog materijala za sva tri tijela (slike 42 i 43). Krivulje označene brojevima odnose se na analize za materijale navedene u tablici 5.

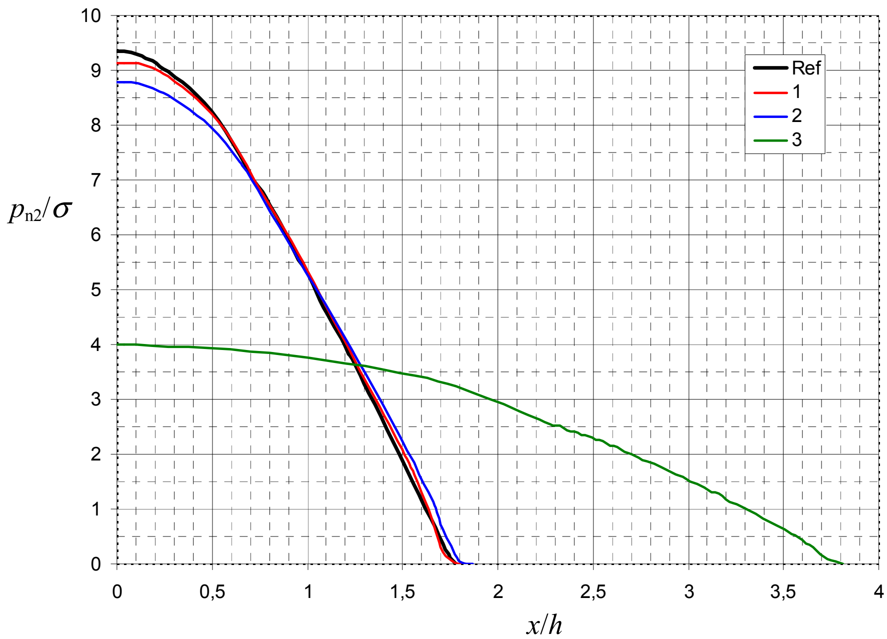


Sl. 47. Rezultati za promjene svojstava materijala utiskivača: a) raspodjele kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između sloja i podloge

a)

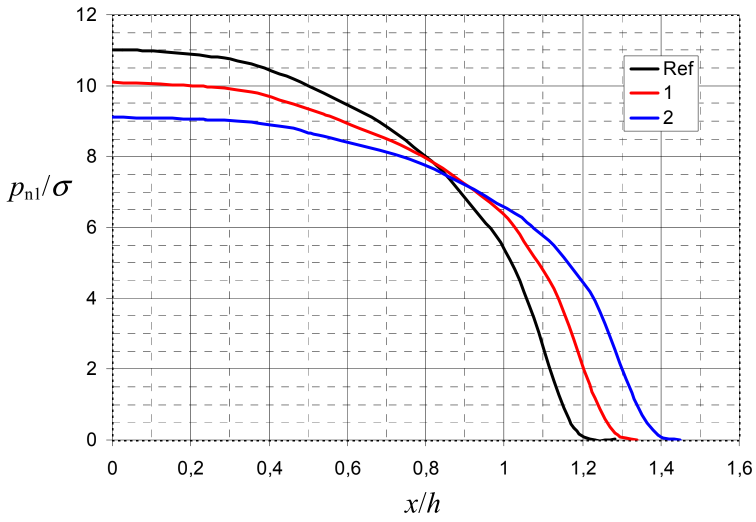


b)

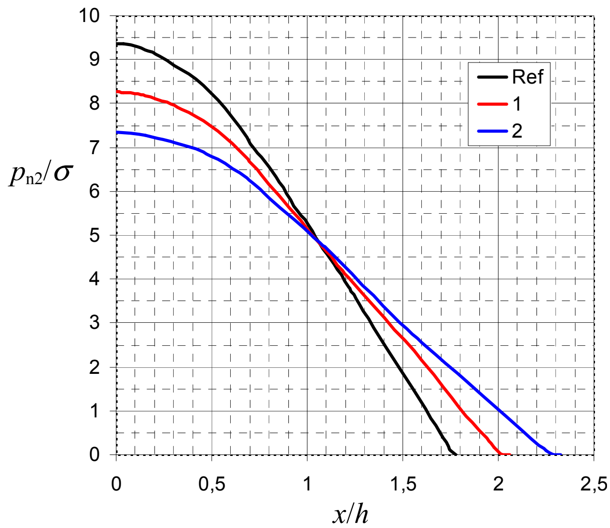


Sl. 48. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava sloja: a) raspodjele kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između sloja i podloge

a)



b)



Sl. 49. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava podloge: a) raspodjele kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između sloja i podloge

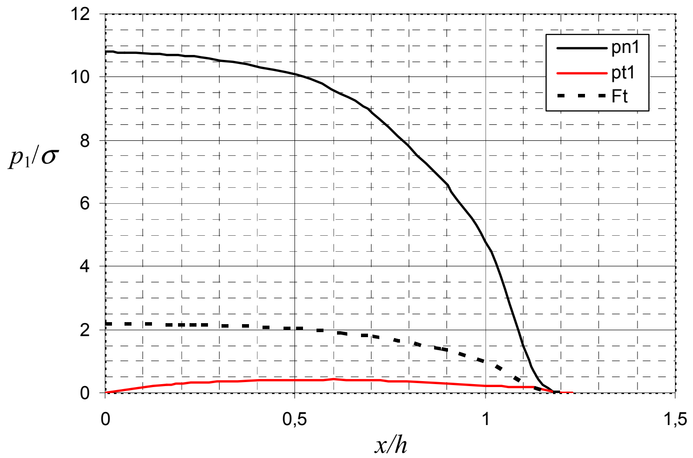
Iz dijagrama na slikama 47-49 vidljivo je da manje vrijednosti modula elastičnosti za bilo koje od triju tijela vodi do kvalitativno istih rezultata, odnosno do manjih vrijednosti maksimalnih kontaktnih pritisaka, popraćeno širenjem kontaktnih površina. Materijal sva tri tijela na navedenu pojavu na gornjoj kontaktnoj površini ima podjednak utjecaj, uz ipak nešto naglašeniji utjecaj kojeg ima utiskivač. Za donju kontaktnu površinu utjecaj sloja (slika 48.b) je značajno slabiji u usporedbi s utjecajem utiskivača i podloge.

Izvedbom numeričkih simulacija za ostale geometrije dobivaju se dijagrami kvalitativno slični rezultatima prikazanima na slikama 47-49, što je dano u prilogu D.2.

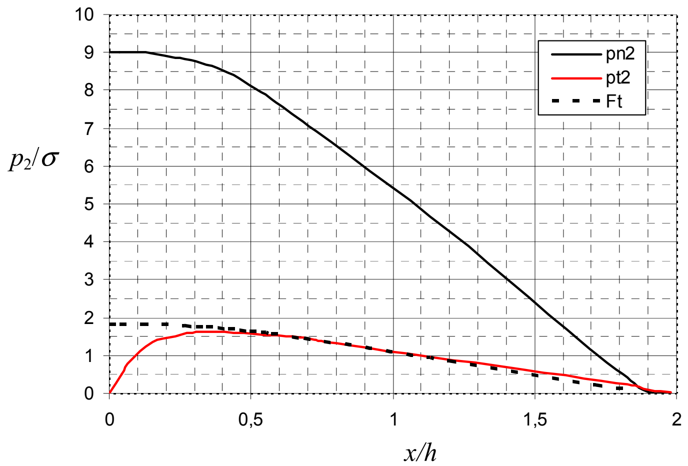
4.3.3. Kontaktni problem s trenjem

Utjecaj trenja za sve je geometrije modeliran za referentni slučaj kombinacije materijala, pri čemu je kao i u analizi ploče, čahure i svornjaka, uzet koeficijent trenja $\mu = 0{,}2$. Na slikama 50-53 prikazane su raspodjele normalnih i tangencijalnih kontaktnih pritisaka na obje kontaktne površine za sve ispitivane geometrije te je i ovdje na svim dijagramima crtkanom linijom prikazana raspodjela intenziteta sile trenja F_T u skladu s Coulombovim modelom.

a)

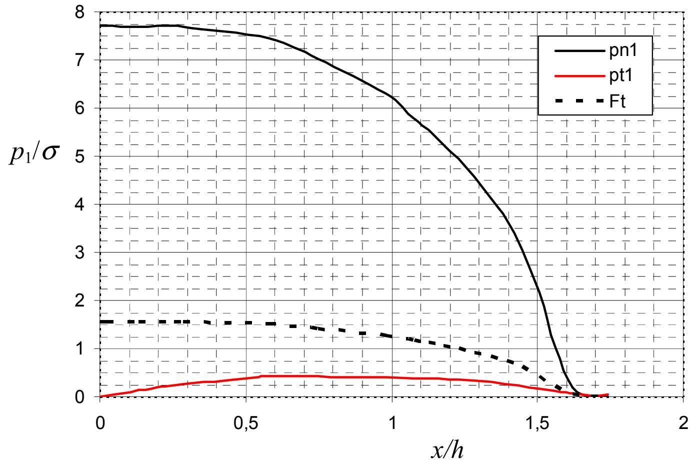


b)

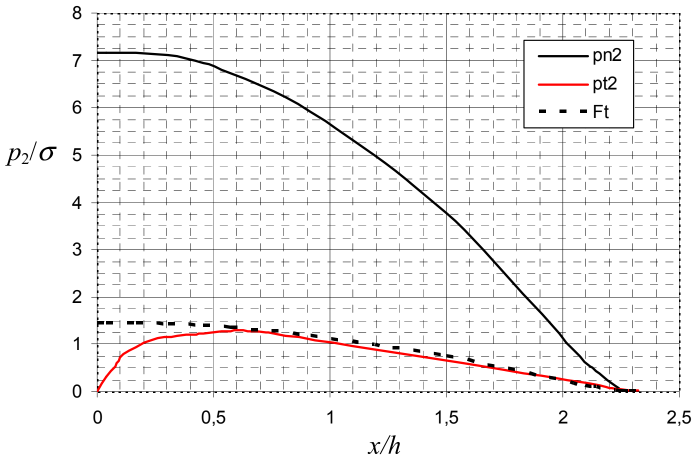


Sl. 50. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju R/h = 50; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između utiskivača i sloja, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između sloja i podloge

a)

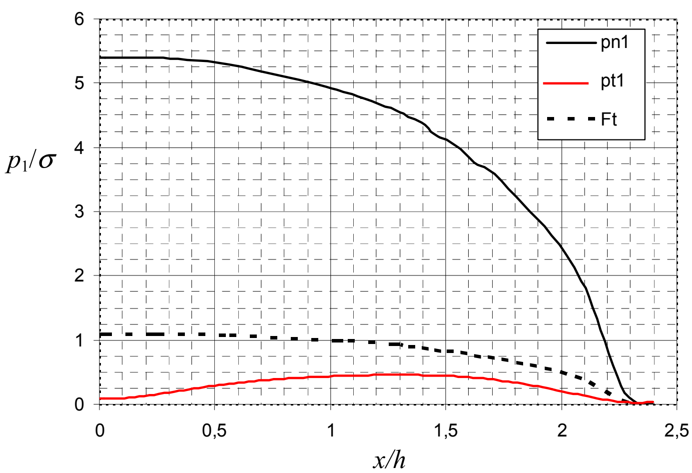


b)

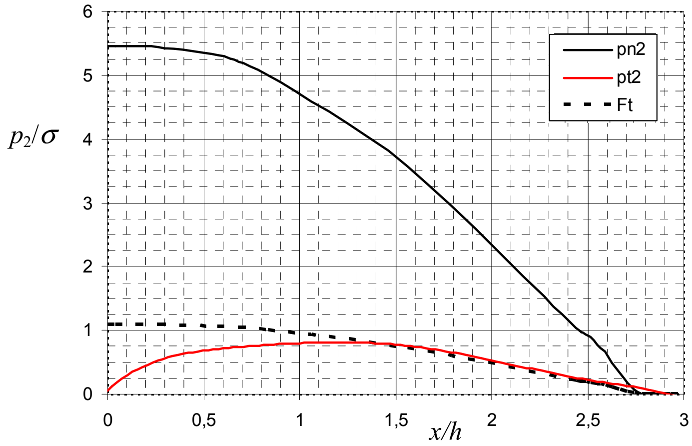


Sl. 51. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju R/h = 100; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između utiskivača i sloja, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između sloja i podloge

a)

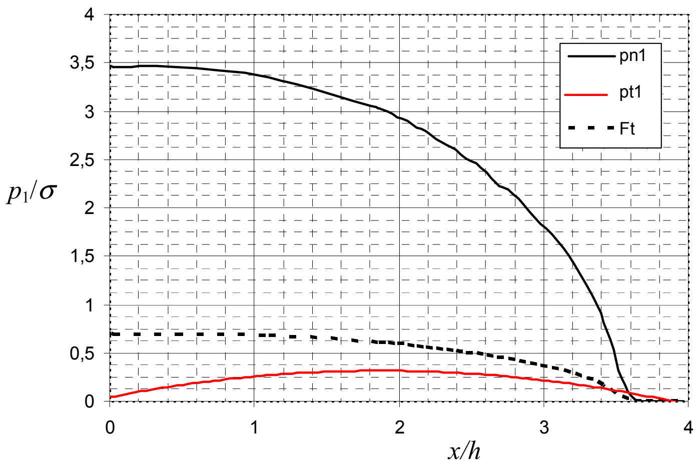


b)

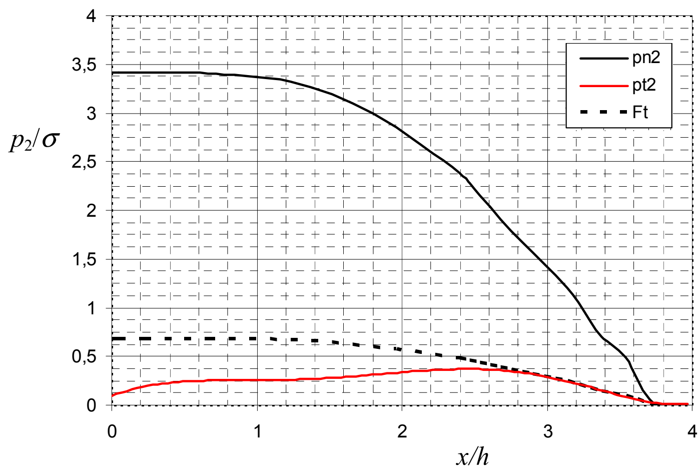


Sl. 52. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju R/h = 200; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između utiskivača i sloja, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između sloja i podloge

a)



b)



Sl. 53. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju R/h =500; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između utiskivača i sloja, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između sloja i podloge

Na temelju dobivenih rezultata prikazanih na slikama 50-53, može se zaključiti da se, neovisno o geometriji promatranoga problema, sve točke u kontaktu utiskivača i sloja nalaze u stanju prianjanja, s obzirom da je sila trenja duž čitave kontaktne površine veća od tangencijalnih kontaktnih sila. Klizanje se ipak javlja u kontaktu sloja i podloge, i to u skladu s očekivanim obrascem prianjanja u središnjem dijelu kontaktne površine i zatim klizanja prema njenim rubovima.

Poglavlje 5

EKSPERIMENTALNI REZULTATI

Provedeni eksperiment sastoji se od tlačnog opterećivanja čeličnih modela podloge, sloja i utiskivača cilindričnog profila u zoni dodira. Opterećivanje je vršeno na statičkoj kidalici, a na modelima su sustavom za fotogrametrijsko snimanje primjenom jedne kamere mjereni pomaci u ravnini profila modela. Tako dobivena polja pomaka mogu se potom usporediti s rješenjima dobivenima pomoću metode konačnih elemenata.

Mjerni sustav za fotogrametriju korišten u izvedenom eksperimentu proizvod je njemačkog proizvođača GOM mbH, koji u objedinjenom sustavu nudi hardver (kamere, računalo, kabeli, lampe itd.) te programsko sučelje u vidu softverskog paketa ARAMIS, unutar kojega se može konfigurirati postavke mjerenja te pratiti i spremati sve dobivene rezultate.

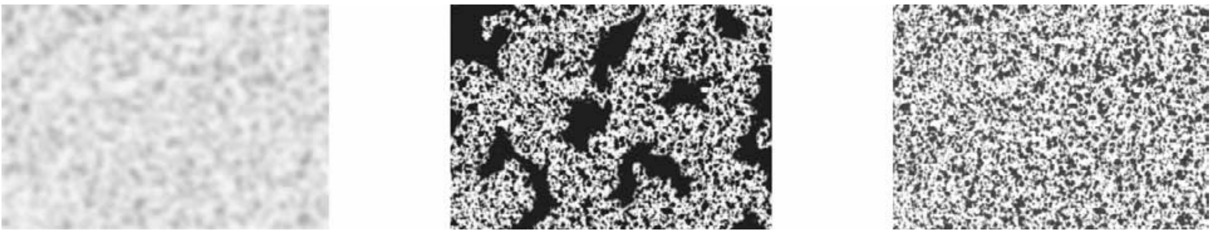
5.1. Metoda fotogrametrijskog mjerenja

5.1.1. Osnovni pojmovi i princip rada

Metoda fotogrametrijskog mjerenja beskontaktna je optička eksperimentalna metoda namijenjena mjerenju pomaka i deformacija unutar odabranog *mjernog volumena* na ispitnom uzorku. Osnovni princip na kojemu metoda počiva jest mjerenje odstupanja položaja točaka unutar mjernog volumena u odnosu na njihove položaje u referentnoj, odnosno nedeformiranoj geometrijskoj konfiguraciji tijela (uzorka). Pritom se pod pojmom mjernog volumena podrazumijeva ograničeno trodimenzionalno područje unutar kojega se može mjeriti i koje je određeno dubinskom oštrinom i vidnim poljem kamere, a mjerni je sustav unutar mjernog volumena najčešće i kalibriran[14]. Ukoliko se u mjerenju koristi samo jedna kamera[15], polje pomaka i deformacija može se očitavati samo u ravnini (na dvije osi), neovisno o prostornom obliku površine na kojoj se vrši mjerenje. U takvom se slučaju sa zakrivljenih površina mogu očitati samo projekcije komponenti pomaka i deformacija. Za 3D mjerenja, kada se mjere sve tri komponente pomaka i duljinske deformacije, potrebno je koristiti dvije kamere.

Slike dobivene pomoću digitalnih kamera pohranjuju se tijekom mjerenja na računalu i softverski se analiziraju na način da ARAMIS unutar mjernog volumena prepoznaje područja jedinstvene strukture crno-bijelog grafičkog uzorka nanesenog na površinu tijela. Svakoj točki unutar vidnog polja softver na temelju jedinstvenosti prepoznatog uzorka pridaje vrijednosti koordinata x, y i z. Pomaci, odnosno promjene tih koordinata, potom se mjere usporedbom položaja prepoznatih jedinstvenih područja uzorka kroz niz uzastopno napravljenih snimaka koji odgovaraju različitim stadijima deformacije, tj. intenzitetima opterećenja koja uzrokuju mjerene pomake. Usporedba položaja područja uzorka izvodi se pomoću jednadžbi za *digitalnu korelaciju slike* (eng. *digital image correlation*) primjenom određenih korelacijskih koeficijenata i matematičkih kriterija usporedbe koji pritom moraju biti zadovoljeni. Primjenom jednadžbi za korelaciju slike mogu se dobiti rezolucije mjerenja pomaka manje od jednog piksela (čak do 0,02 piksela), a što se postiže različitim algoritmima interpolacije intenziteta nijansi sive boje na pikselima (eng. *gray value interpolation*).

Grafički uzorak na površini mjernog objekta često se naziva *stohastički raster* i na jednostavan ga se način može dobiti našpricavanjem kontrastne boje na pozadinsku boju prethodno nanesenu na površinu predviđenu za mjerenje. Da bi fotogrametrijsko mjerenje bilo moguće, stohastički raster mora biti dovoljno oštar, odnosno mora imati dobar kontrast, te mora imati dovoljno fin (prikladan dimenzijama mjernog volumena) i ravnomjeran uzorak u kojemu nema većih jednobojnih područja unutar kojih bi bilo nemoguće identificirati i pratiti točke. Primjeri nekih stohastičkih rastera prikazani su na slici 54.



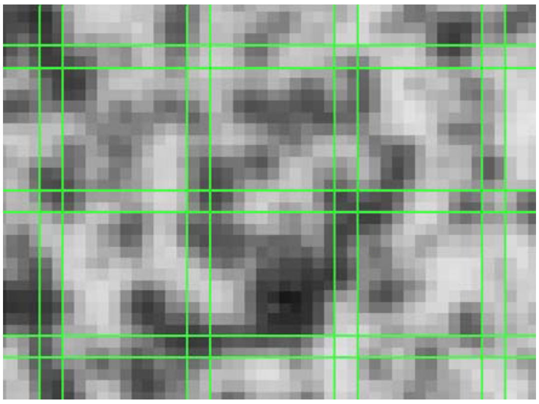
a) *b)* *c)*

Sl. 54. Primjeri stohastičkih rastera: a) neprikladan raster s vrlo slabim kontrastom, b) raster s dobrim kontrastom i prevelikim jednobojnim područjima, c) raster s dobrim uzorkom i kontrastom (preuzeto iz [77])

[14] Bez kalibracije nije moguće točno mjeriti vrijednosti pomaka, koji su apsolutne veličine, ali je moguće mjeriti deformacije, koje proizlaze iz promjena relativnih položaja točaka.

[15] Koriste se ili CCD (*charge-coupled device*) ili CMOS (*complementary metal-oxide-semiconductor*) kamere, ovisno o konkretnom sustavu.

Jedinstveni segmenti površine s nanesenim stohastičkim rasterom unutar kojih se može pratiti pomake točaka nazivaju se *facete*[16]. Facete su pravokutni segmenti unutar vidnog polja kamere (mjernog područja), a primjer uvećanih faceta sa standardnim postavkama programa ARAMIS prikazan je na slici 55.



Sl. 55. Facete dimenzija 15×15 piksela s korakom od 13 piksela (2 piksela preklapanja); standardna postavka u softveru ARAMIS (preuzeto iz [77])

Facete se, kako je već rečeno, u procesu deformiranja tijela identificiraju i prate na temelju jedinstvenih raspodjela intenziteta nijansi sive boje sadržanih unutar njihovih granica, a koordinate faceta određuju se na temelju njihovih kutnih točaka i rezultirajuće centralne točke koja se naziva *mjerna točka* (eng. *measurement point*). Drugim riječima, faceta predstavlja jednoznačno određenu okolinu unutar koje se može identificirati karakteristična mjerna točka (središte) i njene pripadajuće koordinate.

Za proračun položaja faceta (njihovih mjernih točaka) potrebna je početna/referentna točka unutar mjernog volumena, koja se definira prije deformiranja tijela i koja je najčešće tijekom čitavog mjerenja vezana uz jednu, istu facetu. Primjenom spomenutih matematičkih metoda za korelaciju slike za svaku se facetu iz njenih 2D koordinata dobivenih iz jedne, a potom i druge kamere dobiva njen rezultirajući 3D položaj, odnosno rezultirajuća mjerna točka. Zatim se na temelju utvrđenih koordinata mjernih točaka između njih vrši interpolacija pa se vrijednosti položaja mogu dobiti na skali manjoj od jednog piksela. Kamere tijekom mjerenja procesa deformiranja rade na određenoj frekvenciji snimanja (eng. *frame rate*) te se za svaki snimak u dobivenome nizu proračunavaju novi položaji, odnosno pomaci svih faceta. Iz tako se utvrđenih pomaka mjernih točaka potom na površini tijela uz primjenu jednadžbi teorije elastičnosti proračunavaju deformacije.

Veličina faceta i njihova koraka, iz kojih proizlazi gustoća rasporeda faceta i eventualno iznos njihova međusobnog prekrivanja, mogu se u postavkama softvera mijenjati prema potrebama i specifičnostima svakog pojedinog mjerenja. Utjecaj odstupanja od standardnih

[16] U engleskoj se literaturi na tematiku digitalne korelacije slike uobičajeno susreće pojam *subset*, tj. podskup. Pritom se podrazumijeva da se radi o podskupu ukupnog broja piksela koji sačinjavaju čitavu sliku, odnosno vidno polje kamere.

vrijednosti navedenih u opisu slike 55 može se kvalitativno sistematizirati kako je navedeno u tablici 6.

Tab. 6. Utjecaj parametara faceta na mjerenje [77]

Veličina facete veća od standardne	- točnost rezultirajuće mjerne točke se povećava - proračun zahtijeva više vremena - nije moguće uočiti lokalne efekte unutar facete
Veličina facete manja od standardne	- točnost rezultirajuće mjerne točke se smanjuje - proračun zahtijeva manje vremena - bolje se mogu uočiti lokalni efekti
Korak faceta manji od standardnog	- gustoća mjernih točaka se povećava - proračun zahtijeva više vremena
Korak faceta veći od standardnog	- gustoća mjernih točaka se smanjuje - proračun zahtijeva manje vremena

5.1.2. Digitalna korelacija slike

Praćenje promjena položaja fizički istih točaka na površini tijela usporedbom položaja karakterističnih mjernih točaka u deformiranom stanju s njihovim položajima na referentnoj slici, koja odgovara nedeformiranom stanju, naziva se digitalnom korelacijom slike. Kako je praktički nemoguće pratiti točke ukoliko su vezane uz samo jedan piksel, to se svaku točku promatra unutar okoline sačinjene od većeg broja piksela, tj. polja piksela koje se naziva podskup (eng. *subset*) ili faceta. Svaka faceta unutar svojih granica ima jedinstvenu raspodjelu intenziteta nijansi sive boje (eng. *light intensity distribution, grey level distribution*) koja ju razlikuje od ostalih faceta. Sama se metoda digitalne korelacije temelji na činjenici da ta raspodjela tijekom procesa deformiranja ostaje nepromijenjena, pa je slijedom toga digitalna korelacija postupak matematičkog uspoređivanja raspodjele vrijednosti intenziteta sive boje između promatranog i referentnog skupa piksela, tj. faceta.

Ukoliko se s $f(x,y)$ označi raspodjela intenziteta sive boje na referentnoj slici, a s $g(x',y')$ raspodjela intenziteta sive boje na slici deformirane površine, tada se, zbog jednoznačnosti svakog segmenta rasterskog uzorka na površini, princip korelacije može posve općenito matematički formulirati kao preslikavanje Y iz referentne nedeformirane u deformiranu konfiguraciju facete kao

$$Y : f \rightarrow g \ \ni \ g(x',y') = f(x,y), \tag{5.1}$$

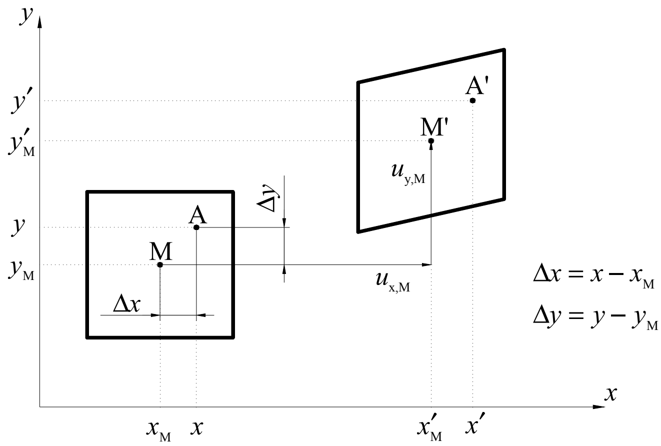
odnosno

$$g(x',y') = Y[f(x,y)], \tag{5.2}$$

što se u eksplicitnom obliku može zapisati kao

$$x' = x + u_{\mathrm{x}}(x, y),$$
$$y' = y + u_{\mathrm{y}}(x, y). \tag{5.3}$$

Opisani je princip zornije prikazan na slici 56.



Sl. 56. Faceta u nedeformiranoj i deformiranoj konfiguraciji

Veza koordinata proizvoljne točke A(x,y) unutar facete u nedeformiranoj i deformiranoj konfiguraciji može se, sukladno oznakama na slici 56, izraziti kao linearizacija izraza (5.3) oko točke M na sljedeći način [78-81]:

$$x' = x_{\mathrm{M}} + u_{\mathrm{x,M}} + \left.\frac{\partial u_{\mathrm{x}}}{\partial x}\right|_{\mathrm{M}} \Delta x + \left.\frac{\partial u_{\mathrm{x}}}{\partial y}\right|_{\mathrm{M}} \Delta y, \tag{5.4.a}$$

$$y' = y_{\mathrm{M}} + u_{\mathrm{y,M}} + \left.\frac{\partial u_{\mathrm{y}}}{\partial x}\right|_{\mathrm{M}} \Delta x + \left.\frac{\partial u_{\mathrm{y}}}{\partial y}\right|_{\mathrm{M}} \Delta y. \tag{5.4.b}$$

Cilj je pronaći takvo polje pomaka pomoću kojega se postiže ekvivalencija između dviju raspodjela intenziteta sive boje, odnosno mora vrijediti

$$f(x, y) = g(x, y, u_i) = g(x', y'). \tag{5.5}$$

U praktičnoj se implementaciji ove metode kao kriterij podudarnosti dviju raspodjela vrijednosti intenziteta sive boje na dva skupa piksela upotrebljavaju različiti korelacijski koeficijenti, koji uvijek poprimaju ekstremnu vrijednost (najčešće minimum u vidu nulte vrijednosti) kada se uspoređuju dvije međusobno odgovarajuće konfiguracije. Svaka je faceta četverokutni skup piksela te svakom pikselu pripada neka konstantna vrijednost intenziteta sive boje, uobičajeno u rasponu od 0 za crnu do 100 za bijelu boju, pa se stoga i sve diskretne vrijednosti intenziteta na pikselima unutar facete s m piksela u vertikalnom (po osi y) i n piksela u horizontalnom smjeru (po osi x)[17] mogu zapisati u matričnom obliku:

[17] Stranice deformirane fasete uglavnom neće ostati horizontalne i vertikalne, ali je preslikavanje piksela iz nedeformirane u deformiranu konfiguraciju jednoznačno.

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,m} & \cdots & f_{m,n} \end{bmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{bmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1,m} & \cdots & g_{m,n} \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Postupak korelacije može se tada svesti na uspoređivanje stupnja poklapanja vrijednosti dviju matrica. U objavljenoj se literaturi, ali i u praktičnoj primjeni metode, najčešće mogu pronaći korelacijski koeficijenti sljedećih matematičkih formulacija [78-83]:

$$C=1-\frac{\sum_{m,n} f(x_m,y_n)g(x'_m,y'_n)}{\sqrt{\sum_{m,n} f^2(x_m,y_n)g^2(x'_m,y'_n)}}, \tag{5.7}$$

$$C=\frac{\sum_{m,n}[f(x_m,y_n)-g(x'_m,y'_n)]^2}{\sum_{m,n} f^2(x_m,y_n)}, \tag{5.8}$$

$$C=1-\frac{\sum_{m,n}\left[f(x_m,y_n)-\bar{f}\right]\left[g(x'_m,y'_n)-\bar{g}\right]}{\sqrt{\sum_{m,n}\left[f(x_m,y_n)-\bar{f}\right]^2\sum_{m,n}\left[g(x'_m,y'_n)-\bar{g}\right]^2}}, \tag{5.9}$$

pri čemu su $\bar{f}$ i $\bar{g}$ u izrazu (5.9) srednje vrijednosti matrica **F** i **G**. Korelacijski koeficijent oblika određenog izrazom (5.7) naziva se u engleskoj literaturi *cross-correlation coefficient*, dok oblici dani izrazima (5.8) i (5.9) spadaju u klasu korelacijskih koeficijenata koji mjere sumu kvadrata razlika vrijednosti, tzv. *sum-squared difference correlation*. Sustav ARAMIS, koji je korišten u ovom istraživanju, ima u svojem algoritmu implementiran korelacijski kriterij određen koeficijentom u izrazu (5.9) i koji se u usporedbi s drugim korelacijskim kriterijima u primjeni pokazuje kao najrobusniji[18] [82].

Uzimajući u obzir izraz (5.4), korelacijski koeficijent u slučaju mjerenja 2D pomaka uvijek ovisi o šest parametara – dvije komponente pomaka i ukupno četiri gradijenta pomaka. Korelacijski će koeficijent kao funkcija $C=C(\mathbf{v})$ vektora parametara

$$\mathbf{v}=\{v_1 \quad \cdots \quad v_6\}=\left\{u_{\mathrm{x,M}} \quad u_{\mathrm{y,M}} \quad \frac{\partial u_{\mathrm{x}}}{\partial x} \quad \frac{\partial u_{\mathrm{x}}}{\partial y} \quad \frac{\partial u_{\mathrm{y}}}{\partial x} \quad \frac{\partial u_{\mathrm{y}}}{\partial y}\right\} \tag{5.10}$$

poprimiti ekstremnu vrijednost kada komponente vektora **v** poprime vrijednosti stvarnih pomaka i njihovih gradijenata. Zadatak korelacije dva skupa piksela može se, prema tome, formulirati kao optimizacijski problem u kojemu se ispravnim izborom varijabli v_i u okolici mjerne točke M minimizira korelacijski koeficijent C.

[18] Premda svaki korelacijski kriterij u teoretskim razmatranjima konvergira točnom rješenju, u stvarnim se mjerenjima zbog utjecaja raznih čimbenika javljaju greške i odstupanja u strukturi digitalnih slika. Nejednolika osvijetljenost površine, koja naročito može doći do izražaja pri mjerenju većih pomaka, i/ili nejednako vrijeme ekspozicije česti su uzroci toj pojavi, a do zamućivanja slike i gubitka kontrasta može doći i zbog deformacije ili gibanja površine. To kao svoju posljedicu ima degradaciju slike i numerički nesavršeno poklapanje raspodjela intenziteta sive boje, pri čemu se može dogoditi da algoritam nije u stanju pronaći zadovoljavajuće rješenje.

Postupak optimizacije u konvencionalnim se algoritmima provodi za svaku facetu, a preliminarni se postupak sastoji od traženja dovoljno točne procjene početnih vrijednosti parametara optimizacije, odnosno vrijednosti vektora **v**. Te se vrijednosti zatim koriste kao polazne vrijednosti u primjeni točnijeg optimizacijskog algoritma, u kojemu se obično primjenjuje Newtonova metoda. Kao najbolji skup polaznih vrijednosti za optimizacijski se algoritam uglavnom uzima takav vektor $\mathbf{v} = \{u_{\mathrm{x,M}}, u_{\mathrm{y,M}}, 0, 0, 0, 0\}$ koji daje najmanju vrijednost korelacijskog koeficijenta *C*. To znači da se prvo kroz određen broj pokušaja traži dovoljno dobra procjena vektora čiste translacije čitave facete (s greškom reda veličine jednog piksela), nakon čega se optimizacijom pronalazi puno točnije rješenje za stvarne pomake mjerne točke i gradijente pomaka u njenoj okolici, koji ujedno definiraju i distorziju facete.

Iteracijska shema za optimizaciju primjenom Newtonove metode, odnosno za postupak proračuna rezultirajućih pomaka i njihovih gradijenata, može se zapisati na sljedeći način [78,80,84]:

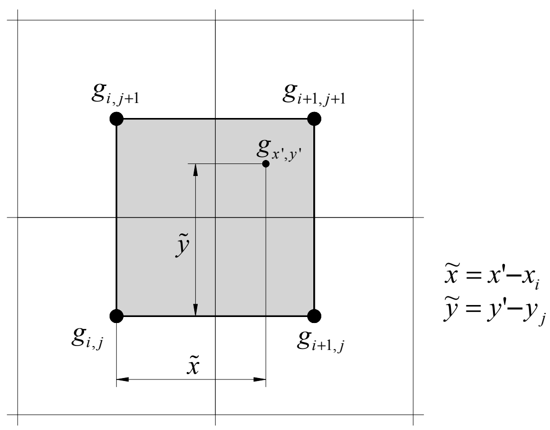
$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)} + \Delta\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{H}^{-1}\left(\mathbf{v}^{(k)}\right)\nabla C\left(\mathbf{v}^{(k)}\right), \tag{5.11}$$

gdje je α_k veličina *k*-tog koraka iteracije, a **H** je Hessova matrica, pri čemu vrijedi

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\partial^2 C}{\partial v_i \partial v_j}\right], \; \nabla C = \left\{\frac{\partial C}{\partial v_i}\right\}. \tag{5.12}$$

Da bi se optimizaciju moglo provesti i dobiti vrlo točna rješenja s pogreškom značajno manjom od jednog piksela, vrijednosti intenziteta sive boje deformirane konfiguracije, koje su unutar svakog piksela konstantne, potrebno je na neki način interpolirati (slika 57). Time se, umjesto na matricama diskretnih vrijednosti, operacije dane izrazima (5.11) i (5.12) izvode na neprekidnim i derivabilnim funkcijama. U praktičnoj se primjeni vrlo često mogu susresti bilinearna ($m,n = 0,1$) i bikubna ($m,n = 0,1,2,3$) interpolacija, koje se mogu zapisati u obliku

$$g(x', y') = \sum_{m,n} \beta_{mn} \tilde{x}^m \tilde{y}^n \;, \;\; \tilde{x}, \tilde{y} \in [0,1]. \tag{5.13}$$



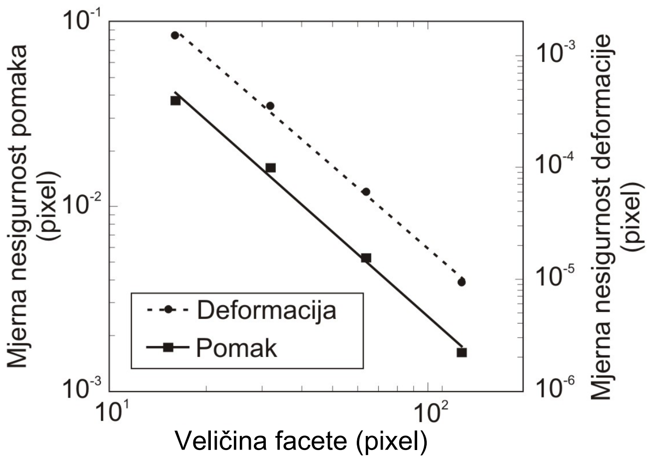
Sl. 57. Područje interpolacije (osjenčano) određeno je s četiri piksela; vrijednosti se za svaki piksel uzimaju na koordinatama njegova geometrijskog središta

Veličine $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$ u izrazu (5.13) bezdimenzijske su koordinate unutar područja interpolacije mjerene od cjelobrojnih koordinata i, j donjeg lijevog piksela, a koeficijenti β_{mn} jednoznačno su određeni vrijednostima intenziteta sive boje u četirima pikselima koji određuju područje interpolacije.

Općenito se rezolucija r, odnosno najmanja promjena koju mjerni sustav može očitati, pri fotogrametrijskom mjerenju pomaka može izraziti na sljedeći način [85]:

$$r = \frac{VPK}{N \cdot SB}, \tag{5.14}$$

gdje je VPK [mm] veličina vidnog polja kamere, N je ukupni broj piksela u jednom retku unutar vidnog polja kamere, a SB je mogući broj nijansi sive boje u pikselu (npr. za 8-bitnu kameru $SB = 2^8 = 256$). Vrijednost rezolucije danu izrazom (5.14) u praktičnim mjerenjima ipak treba gledati i u kontekstu mjerne nesigurnosti uzrokovane šumom. Na temelju dijagrama sa slike 58 mjernu se nesigurnost može procijeniti u ovisnosti o veličini facete.



Sl. 58. Mjerna nesigurnost u ovisnosti o veličini facete (preuzeto iz [85])

5.2. Opis eksperimentalnog sustava

5.2.1. Tehničke karakteristike ispitne opreme

Za opterećivanje modela korištena je statička kidalica marke Messphysik Beta 50-5 koja daje maksimalnu silu od 50 kN. Razmak navojnih vretena kidalice je 45 cm pa je to dimenzija koja ujedno ograničava poprečne gabarite eksperimentalnog modela.

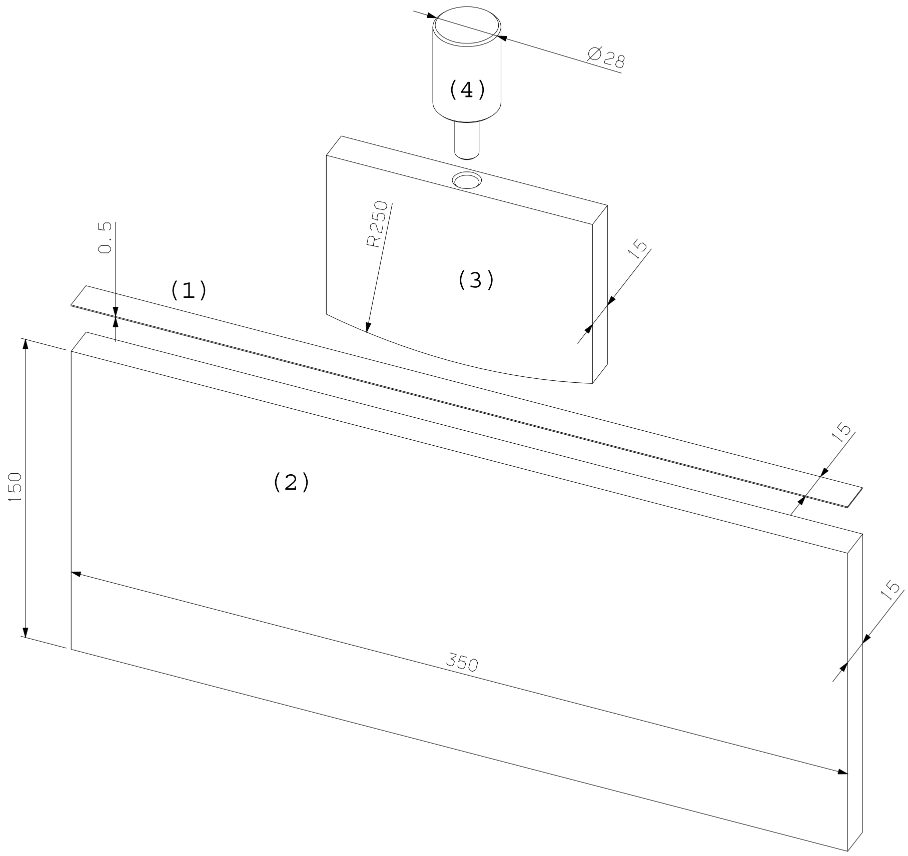
Korišteni sustav za fotogrametriju je ARAMIS 4M, koji koristi 16-bitnu CMOS kameru sa senzorom veličine jednog inča, a najvažnije su mjerne mogućnosti navedenog sustava navedene u tablici 7.

Tab. 7. Osnovne karakteristike sustava ARAMIS 4M [86]

Raspon mjernih volumena, [mm]	*Rezolucija kamere,* [piksel]	*Maksimalna frekvencija snimanja,* [Hz]	*Vrijeme ekspozicije*	*Mjerni raspon za deformacije*	*Točnost mjerenja deformacija*
10×7 ... 4000×2700	2352×1728	60	0,1 ms ... 2 s	0,02% ... >100%	do 0,02%

5.2.2. Eksperimentalni model

Eksperimentalni model izrađen je za ispitivanje problema elastičnog sloja na podlozi i sastoji se od četiri zasebna komada izrađena od čelika: podloga, sloj, utiskivač cilindričnog profila te pričvrsni element namijenjen za prihvat u čeljusti kidalice. Pritom su utiskivač i pričvrsni element zbog jednostavnijeg rukovanja i montaže međusobno spojeni u čvrstom dosjedu. Navedeni su elementi u konfiguraciji predviđenoj za eksperiment prikazani na slici 59.



Sl. 59. Eksperimentalni model: (1) sloj, (2) podloga, (3) utiskivač cilindričnog profila, (4) prihvat za čeljusti kidalice

Utiskivač i podloga izrađeni su od čelika za poboljšavanje Č1530, čija je minimalna granica elastičnosti u nepoboljšanom stanju za debljine izradaka manje od 16 mm

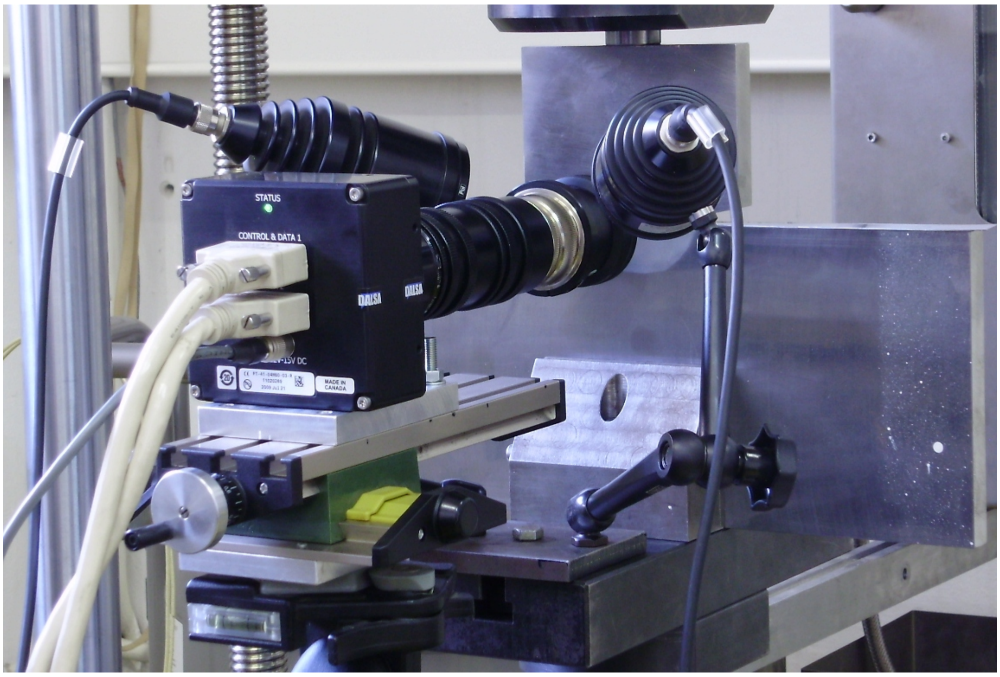
$$R_{\mathrm{e,\,min}} = 340\ \mathrm{MPa}\,, \tag{5.15}$$

Materijal sloja opći je konstrukcijski čelik Č0361, čija je granica elastičnosti za debljine izradaka manje od 16 mm

$$R_{\mathrm{e}} = 235\ \mathrm{MPa}\,, \tag{5.16}$$

Pritom je za oba materijala modul elastičnosti $E = 210$ GPa i Poissonov broj $\nu = 0{,}3$.

Potpuno pripremljen model, učvršćen na statičkoj kidalici i s nanesenim stohastičkim rasterom u zoni predviđenoj za snimanje prikazan je na slici 60.



Sl. 60. Eksperimentalni sustav spreman za opterećivanje i fotogrametrijsko snimanje

5.3. Eksperiment i rezultati mjerenja

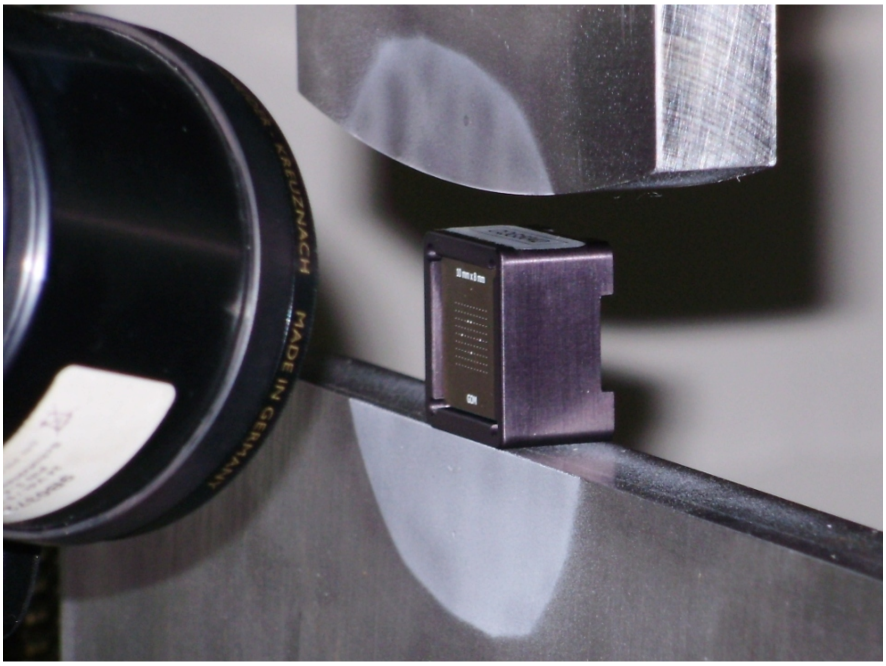
5.3.1. Priprema eksperimenta

Priprema eksperimenta sastoji se u podešavanju oštrine slike (podešavanjem udaljenosti objektiva i fokusa), nanošenju stohastičkog rastera na površinu modela u okolici zone predviđene za snimanje, kalibracije sustava i naposljetku određivanja potrebnih softverskih postavki (veličina faceta, frekvencija snimanja, ekspozicija itd.).

Prvi korak u postupku nanošenja rastera na modele je nanošenje bijele pozadinske boje na koju se zatim stavlja crni raster. Pritom raster zbog malih dimenzija površine koju će se snimati mora biti dovoljnog stupnja finoće, odnosno točke crne boje na bijeloj pozadini moraju biti dovoljno malene. U tu je svrhu kao materijal za boju korišten prah crne boje

MicroGraphics™ za toner laserskih pisača. Kako bi se dobila tekućina koju se može nanijeti na površine, prah je umiješan u alkohol, a mješavina je zatim kroz 40-ak sekundi ultrazvučno homogenizirana u uređaju *Ultrasonic cleaner*. Tako dobivena tekućina je potom ulivena u pneumatski uređaj za fino nanošenje boje (Iwata High Performance Microbrush) spojen na kompresor. Upotrebom takvog uređaja na modele su nanesene fino raspršene kapljice crne boje koja je na površinama stvorila stohastički raster potreban za fotogrametrijsko mjerenje, što je prikazano na slici 61.

Kalibracija sustava izvedena je pomoću kalibracijskog panela CQ10×8 namijenjenog za male mjerne volumene, prikazanog na slici 61, koji na sebi ima mrežu točaka poznatog rasporeda i međusobnih udaljenosti. Sam postupak kalibracije (opis dan u [86]) potrebno je izvesti pod identičnim uvjetima osvjetljenja i konfiguracije senzora (udaljenost i orijentacija objektiva, fokus i distorzija leće itd.) kakvi su predviđeni i za provedbu eksperimenta.



Sl. 61. Model podloge i utiskivača prilikom kalibracije s kalibracijskim objektom postavljenim na podlozi; na modelima je vidljiv naneseni stohastički raster

5.3.2. Definiranje osnovnih parametara eksperimenta

Dvije najvažnije stvari u planiranju eksperimenta bile su određivanje sile s kojom će se na kidalici opteretiti modeli te veličina vidnog polja kamere. Poznavanje dopustivog intenziteta sile važno je kako bi se osiguralo mjerenje pri kojemu se sigurno ostaje u elastičnom području, odnosno kako bi se izbjegla svaka značajnija pojava plastičnih deformacija. Pritom je za određivanje sile potrebna njena korelacija s rezultirajućim maksimalnim kontaktnim pritiskom i posljedično naprezanja u materijalu, koje mora biti manje od naprezanja na granici tečenja. Za određivanje veličine vidnog polja kamere potrebno je poznavanje poluširine kontakta. U tu je svrhu kao mjerodavne veličine potrebno uzeti kontaktni pritisak na gornjoj površini sloja uslijed kontakta s utiskivačem, jer se na toj površini uvijek može očekivati veći maksimalni kontaktni pritisak, te poluširinu kontakta između sloja i podloge, jer će ta kontaktna površina uvijek biti veća od površine kontakta sloja s utiskivačem.

Maksimalni se kontaktni pritisci, kao i širina kontaktne površine, na temelju zadane debljine sloja i poznatih karakteristika materijala, na jednostavan i brz način mogu procijeniti iz rezultata objavljenih u literaturi [36]. Pritom je kao polazna točka, uz $G_1/G_2 = 1$ i $\mu = 0$, iz [36] uzet slučaj kada vrijedi: $R/h = 500$ i $G_1/(P/h) = 100$, pri čemu je polumjer utiskivača određen vrijednošću eksperimentalnog modela R = 250 mm.

Kako bi navedeni bezdimenzijski odnosi ostali očuvani, iz slike 8 na str. 1095 u [36] proizlazi da za intenzitet tlačne sile P mora vrijediti:

$$P = 400\ \text{N}, \quad \text{za } h = 0{,}5\ \text{mm}, \tag{5.17}$$

što će za istu debljinu sloja uzrokovati maksimalni kontaktni pritisak $p_{1,\max}$ = 296 N/mm^2.

Iz relacija teorije elastičnosti poznato je da maksimalno ekvivalentno i tangencijalno naprezanje koja se u tijelu javljaju za slučaj Hertzova kontakta poprimaju brojčane vrijednosti značajno manje od vrijednosti maksimalnog kontaktnog pritiska; primjerice, u slučaju dvaju cilindara vrijedit će $\sigma_{\mathrm{e},\max} = 0{,}557 p_{\max}$ i $\tau_{\max} = 0{,}3 p_{\max}$, što će svakako dati vrijednosti bliske intenzitetu naprezanja koje se može očekivati u utiskivaču. Međutim, za složenije slučajeve koji uključuju probleme elastičnih slojeva ovi odnosi neće vrijediti jer ekvivalentno naprezanje u sloju poprima vrijednosti koje su osjetno bliže vrijednosti maksimalnog kontaktnog pritiska. Iz te se činjenice može zaključiti kako se silu nikako ne smije povećati u odnosu na vrijednost danu izrazom (5.17), ukoliko se u sloju debljine 0,5 mm želi izbjeći pojavu plastičnih deformacija.

Vidno polje kamere mora biti veće od dvije poluširine kontaktne površine između sloja i podloge, koja je iz odgovarajuće raspodjele kontaktnih pritisaka jednostavno očitana kao $b/h \cong 2{,}2$ (slika 9 na str. 1095 u [36]). Iz tog odnosa izravno slijedi kako je širina kontakta

$$2b = 2{,}2\ \text{mm}, \quad \text{za } h = 0{,}5\ \text{mm}. \tag{5.18}$$

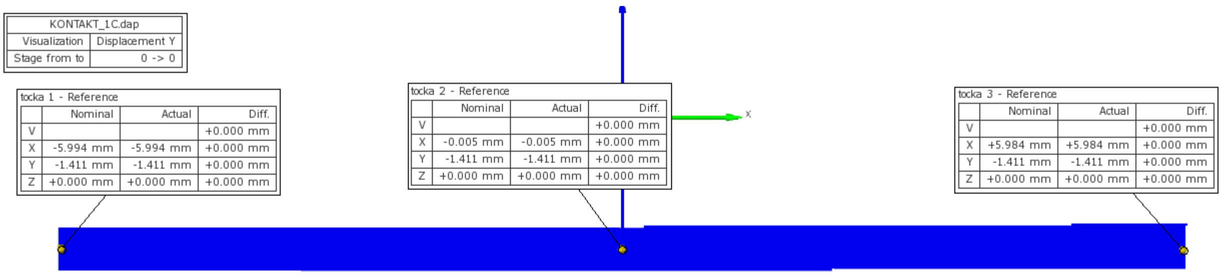
Izvedba eksperimenta sastojala se u tlačnom opterećivanju eksperimentalnog modela opisanog u poglavlju 5.2.2 na statičkoj kidalici, i to za debljinu sloja 0,5 mm, a model je opterećivan silom koja je išla do 1500 N. Intenzitet sile veći od vrijednosti dane u (5.17) primijenjen je radi dobivanja šireg raspona odziva eksperimentalnog modela na opterećenja, ali i kako bi se usporedbom s numeričkom analizom mogla procijeniti razina utjecaja pojave plastifikacije u limu na konačan rezultat, do koje na višim opterećenjima vjerojatno dolazi. Dimenzije vidnog polja kamere pri fotogrametrijskom su snimanju iznosile otprilike 12×8 mm u zoni koja okružuje početnu točku dodira sloja i utiskivača[19], pri čemu se upotrebom jedne kamere snimalo dvodimenzionalno polje pomaka.

U postavkama mjernog sustava ARAMIS podešena je veličina faceta od 30×30 piksela uz korak od 20×20 piksela, što daje međusobno preklapanje faceta od 10 piksela. Iz danog koraka faceta proizlazi da su mjerne točke na slici raspoređene u razmaku od 20 piksela u horizontalnom i vertikalnom smjeru.

S obzirom na navedene parametre, očekivanu se mjernu nesigurnost za pomake na temelju dijagrama sa slike 58 može procijeniti na otprilike 0,015 piksela. Uzme li se u obzir navedena veličina vidnog polja te rezolucija kamere (navedena u tablici 4), proizlazi kako je mjerna nesigurnost reda veličine $\approx 7 \cdot 10^{-5}$ mm.

5.3.3. Dobiveni rezultati i usporedba s MKE

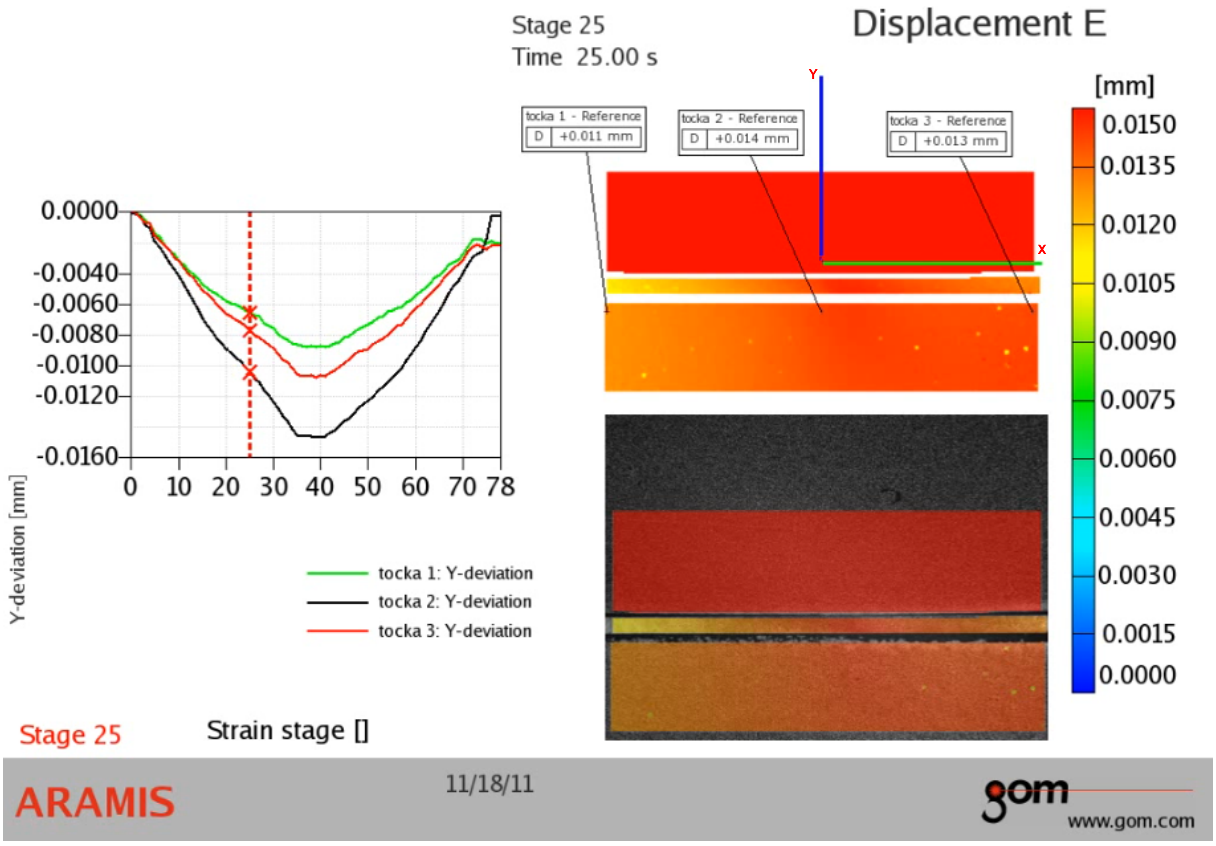
Pri praćenju rezultata eksperimenta naglasak je stavljen na praćenje deformacije sloja, kako zbog toga što je njegovo ponašanje od centralnog interesa u ovom problemu, tako i zbog činjenice da se na sloju mogu očekivati najveći pomaci. U tu su svrhu, kako je prikazano na slici 62, duž čitave osi x mjernog volumena pri sredini debljine sloja definirane tri karakteristične točke, čiji su pomaci odvojeno praćeni u procesu opterećivanja i deformiranja.



Sl. 62. Karakteristične točke na sloju – za svaku točku tablica prikazuje referentan i stvaran položaj točke (njihove x, y i z koordinate) te razliku tih dviju vrijednosti

Za opterećivanje modela maksimalnom tlačnom silom od 1500 N rezultati su prikazani na slici 63. Slika prikazuje krivulje pomaka triju karakterističnih točaka u ovisnosti o stupnju opterećenosti te snimak modela s konturnim prikazom y pomaka s pripadajućom skalom boja i pridruženih vrijednosti pomaka.

[19] Navedene dimenzije vidnog polja kamere ne proizlaze iz striktnog matematičkog odnosa prema širini površine kontakta, već su rezultat stanovitog broja pokušaja tijekom pripreme eksperimenta, kako bi se uz zadovoljavajuću veličinu slike dobila i dobra oštrina slike.

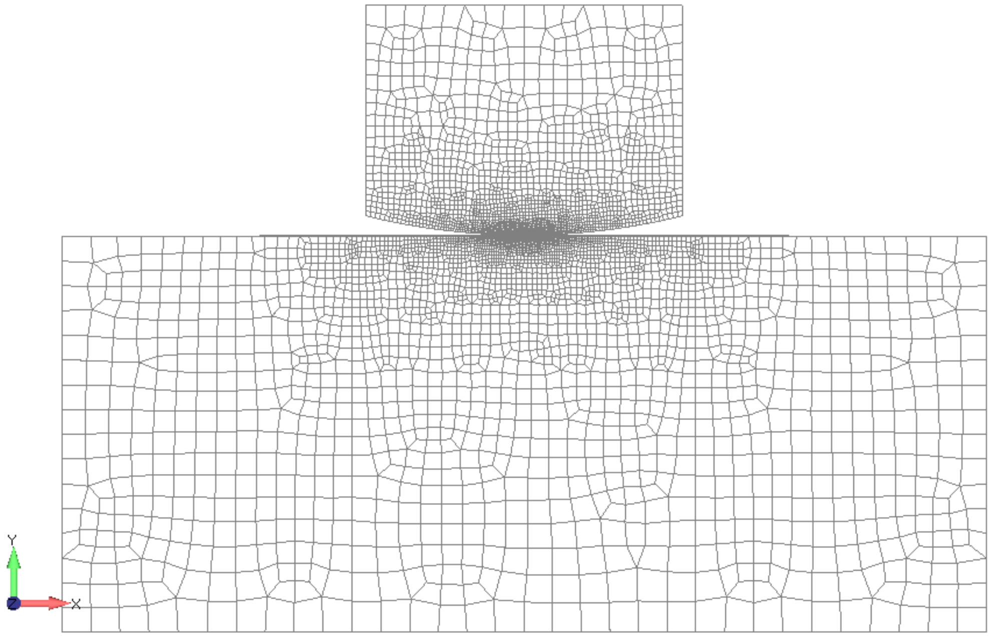


Sl. 63. Prikaz mjernih rezultata za P_{max} = 1500 N; konturni prikaz polja pomaka prikazan je za t = 25 s, što otprilike odgovara intenzitetu opterećenja P = 1070 N

Mjereni su pomaci praćeni u vremenu kontinuirano s povećanjem opterećenja pa su tako i brojčane vrijednosti na apscisi dijagrama prikazanog na slici 63 izražene u sekundama. Sila na kidalici ravnomjerno je povećavana od 0 do 1500 N u vremenu od otprilike 35 s, a kamera je radila s frekvencijom snimanja 1 Hz, odnosno napravljen je jedan snimak u svakoj sekundi tijekom opterećivanja i rasterećivanja modela. Na slici 63 je vidljivo kako prikaz polja *y* pomaka odgovara trenutku *t* = 25 s nakon početka opterećivanja.

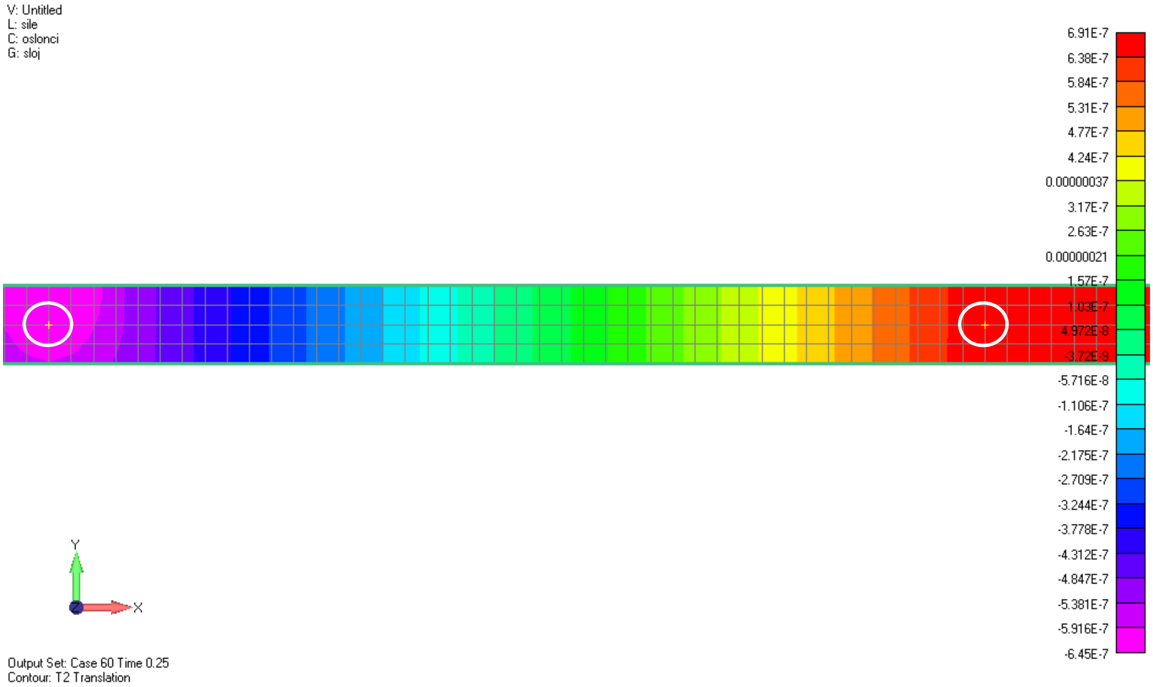
Od triju karakterističnih točaka na sloju, točka 2, smještena na sredini, ima po apsolutnoj vrijednosti najveći *y* pomak, što znači da se nalazi na nižem položaju u odnosu na točke 1 i 3 koje se nalaze na rubu mjerne površine. Takav rezultat jasno ukazuje da su se rubovi sloja izdignuli u odnosu na sredinu koja se nalazi u zoni kontakta, odnosno da je došlo do smanjenja kontakte površine. Pritom točke 1 i 3, kako je vidljivo sa slike 63, nemaju identičan pomak, premda bi pomaci u idealnom slučaju trebali biti posve simetrični s obzirom na početnu točku dodira. To se odstupanje može objasniti uzimajući u obzir nekoliko faktora, od kojih je najutjecajniji neravnost čeličnog lima upotrijebljenog u eksperimentu u ravninama *xy* i *yz*. Povrh toga, središte vidnog polja kamere nije moguće postaviti u savršeno poklapanje s početnom točkom dodira utiskivača i sloja, što ujedno znači da se točke 1 i 3 na rubu vidnog polja nalaze na različitim udaljenostima od stvarne središnje točke kontakta, odnosno od osi simetrije modela utiskivača. Nadalje, točke 1, 2 i 3 odabrane su ručno unutar sučelja programskog paketa ARAMIS pa stoga x koordinate točaka 1 i 3 nisu niti u odnosu na vidno polje kamere po svojim apsolutnim vrijednostima identične, premda je njihova razlika, vidljiva iz tablica na slici 62, u iznosu od 0,01 mm praktički zanemariva.

U numeričkom modelu eksperimentalnog sustava, kako je prikazano na slici 64, modelirana je čitava geometrija. Prilikom simuliranja u obzir je uključena i prisutnost trenja, a za koeficijent trenja usvojena je konvencionalna vrijednost za kontakt čelik-čelik μ = 0,1. Modeli triju tijela (podloge, sloja i utiskivača) omreženi su s ukupno 10 078 konačnih elemenata, povezanih s ukupno 12 551 čvorom te su definirana dva slide line elementa. Rješenje je traženo kroz 200 inkremenata opterećenja uz maksimalno 100 dopuštenih iteracija po svakom inkrementu.

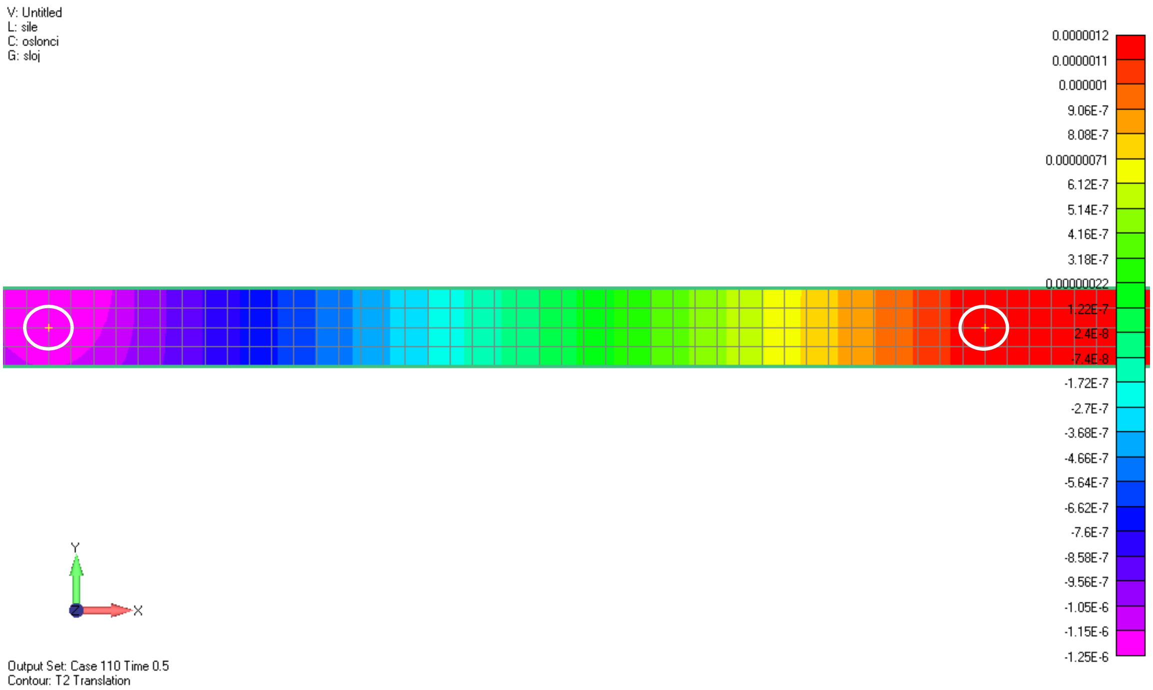


Sl. 64. Numerički model eksperimentalnog modela

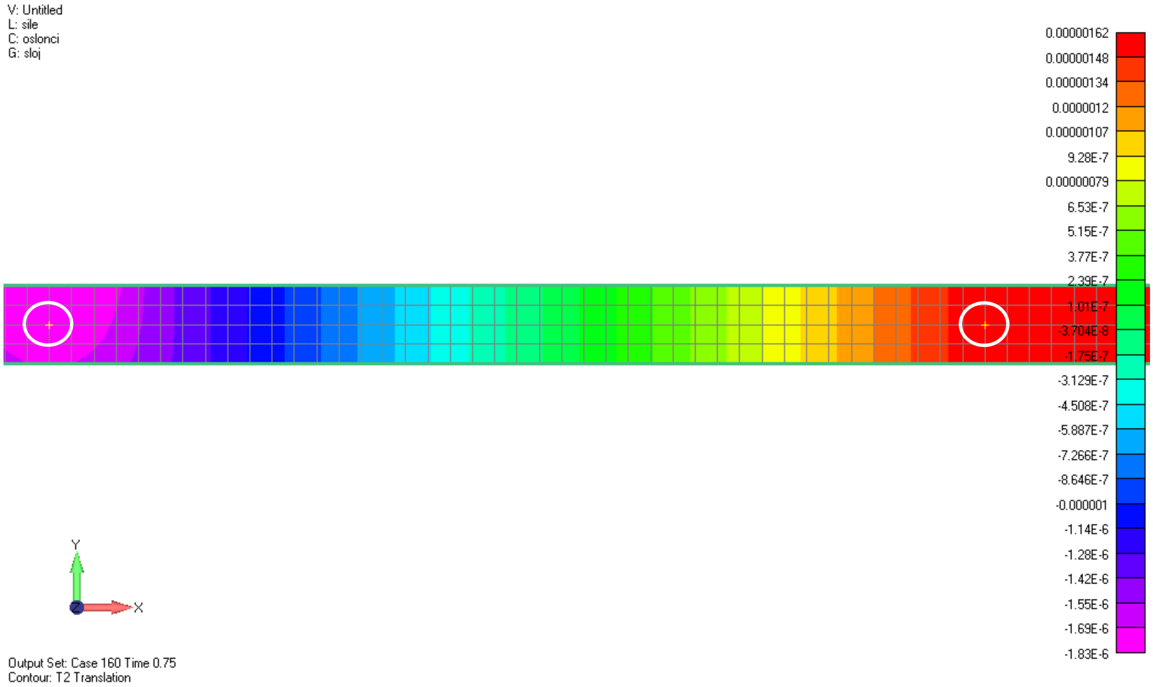
Konturni prikaz polja y pomaka dan je izdvojeno za sloj na slikama 65-67, i to za stadije opterećenja numeričkog modela koji u postotku odgovara stadiju opterećenja eksperimentalnog modela intenzitetima tlačnih sila P = 500 N, P = 1000 N i P = 1500 N. Numeričkom je simulacijom dobiveno dobro kvalitativno i kvantitativno slaganje deformacijske forme sloja u rasponu manjih intenziteta sile (do otprilike 500 N), gledajući razliku pomaka karakterističnih točaka na sloju po osi y. U opisu slika 65-67 navedeni su rezultati za pomake karakterističnih točaka 2 i 3 za tri različita stadija opterećenja, iz kojih se na temelju usporedbe s dijagramom na slici 63 može uočiti kako se razlika između eksperimentalnih podataka i rezultata simulacije postupno povećava, odnosno simulacijski rezultati sve više zaostaju za izmjerenim vrijednostima.



Sl. 65. Razlika y pomaka točaka 2 i 3 za stadij opterećenja P = 500 N iznosi $\Delta y \approx 1,35$ μm, za eksperiment $\Delta y_E \approx 1,4$ μm; relativno odstupanje $(1 - \Delta y/\Delta y_E) \approx 3,6\%$



Sl. 66. Razlika y pomaka točaka 2 i 3 za stadij opterećenja P = 1000 N iznosi $\Delta y \approx 2,4$ μm, za eksperiment $\Delta y_E \approx 1,4$ μm; relativno odstupanje $(1 - \Delta y/\Delta y_E) \approx 9,6\%$



Sl. 67. Razlika y pomaka točaka 2 i 3 za stadij opterećenja P = 1500 N iznosi $\Delta y \approx 3{,}45\ \mu m$, za eksperiment $\Delta y_E \approx 5\ \mu m$; relativno odstupanje $(1 - \Delta y/\Delta y_E) \approx 31\%$

Međutim, između numeričke simulacije i eksperimenta nije postignuto dobro slaganje u pogledu apsolutnih pomaka čitave strukture, što ipak ne utječe značajno na deformacijsko ponašanje sloja i pojavu smanjenja kontaktne površine. Kao dva najvjerojatnija razloga ovom odstupanju apsolutnih pomaka mogu se pretpostaviti ili loša kalibracija mjernog sustava (ili njegova dekalibracija tijekom pripreme ili tijekom procesa mjerenja) ili, pak, pogrešna pretpostavka o mehaničkim svojstvima materijala podloge, koja se u tom slučaju pokazuje značajno podatljivijom od modela u numeričkoj simulaciji.

Poglavlje 6

ZAKLJUČAK

U ovom je radu pružen jezgrovit opis problematike kontaktne mehanike s naglaskom na kontaktni problem sa smanjenjem kontaktne površine. Objašnjena je matematička formulacija kontaktnog problema kroz varijacijsku nejednakost i jednakost, nadopunjeno objašnjenjima o temeljnim konceptima implementacije kontaktnih uvjeta te numeričkih pristupa u rješavanju problema teorije elastičnosti i kontaktne mehanike. U opisu numeričkih metoda objašnjene su formulacije metode konačnih elemenata (MKE) i metode rubnih elemenata (MRE) te njihova primjena u analizi kontaktnih problema. U komparativnoj se analizi ovih dviju metoda može konstatirati kako je metoda rubnih elemenata osjetno složenija u svojoj temeljnoj formulaciji, ali je za razliku od MKE pogodna za izravnu implementaciju kontaktnih uvjeta direktnim uključivanjem zajedničkih nepoznanica u čvorovima kontaktne površine u sustav jednadžbi.

U radu je provedena numerička i eksperimentalna analiza kontakta sa smanjenjem kontaktne površine. Numeričkom je analizom istražen problem svornjaka u ploči te sloja kojeg u elastičnu podlogu pritišće utiskivač cilindričnog profila. Analiza je primjenom metode konačnih elemenata provedena uz pretpostavku linearno elastičnog ponašanja materijala i ravninskog stanja naprezanja. U kategoriji problema svornjaka i ploče istraživanje je bilo koncentrirano na složeniji problem u kojemu između ploče i svornjaka postoji i čahura. U analizi obje kategorije problema kao polazno rješenje uzet je slučaj u kojemu su elastična svojstva svih triju tijela identična, a nakon toga je ispitan utjecaj geometrije strukture, intenziteta opterećenja te različitih mehaničkih svojstava za svako od tijela. U završnim su razmatranjima obiju analiza riješeni modeli u kojima je u obzir bilo uzeto i trenje.

Za problem ploče, čahure i svornjaka dobivene krivulje raspodjela kontaktnih pritisaka u uvjetima jednolikog vlačnog opterećenja ploče pokazuju interesantno ponašanje ovakve vrste kontaktnih problema. Naime, na kontaktnim površinama s većim zahvatnim kutom mogu se javiti i veći maksimalni kontaktni pritisci, što je naizgled vrlo nekarakteristično ne samo u konvencionalnim kontaktnim problemima, već i općenito kod problema sa smanjenjem kontaktne površine, kao što je primjerice slučaj sloja i podloge. Objašnjenje za ovakvu pojavu treba tražiti u činjenici da se kontaktna površina između čahure i svornjaka nalazi na manjem polumjeru nego kontaktna površina između čahure i ploče, što onda usprkos većem kontaktnom kutu efektivno ostavlja na raspolaganju manju fizičku količinu površine za prenošenje kontaktnih sila. Nadalje, pokazano je da intenzitet opterećenja ovako opterećene strukture nema nikakvog značajnog utjecaja na promjenu kontaktnih kutova, a kontaktni su pritisci linearno ovisni o opterećenju. Ponašanje ovakvog spoja u ovisnosti o materijalnim značajkama pojedinih komponenti pokazuje se kao prilično raznoliko. Ploča ima najizraženiji utjecaj i smanjenje njenog modula elastičnosti u značajnom iznosu doprinosi povećavanju kontaktnih pritisaka na obje kontaktne površine, ali uz slabo zamjetan utjecaj na promjene kontaktnih kutova. Utjecaj materijala čahure povećava se kako se povećava njena debljina; slabija mehanička svojstva čahure smanjuju kontaktne pritiske na obje kontaktne površine, povećavaju kontaktni kut s pločom i smanjuju kontaktni kut sa svornjakom. Slabija mehanička svojstva svornjaka u usporedbi sa čahurom imaju kvalitativno jednak, ali kvantitativno puno izraženiji utjecaj na smanjenje kontaktnih pritisaka, pri čemu kontaktni kut ploča-čahura opada, a kontaktni kut čahura-svornjak raste. U analizi problema s trenjem utvrđeno je da na obje kontaktne površine postoji središnja zona prianjanja omeđena dvjema zonama klizanja prema rubovima kontaktnih površina.

Za problem sloja kojeg u elastičnu podlogu pritišće elastični utiskivač cilindričnog profila utvrđeno je nelinearno ponašanje sustava. Za razliku od problema ploče, čahure i svornjaka, zavisnost intenziteta kontaktnih pritisaka o porastu opterećenja za sve ispitane geometrijske konfiguracije očekivano ovisi o opterećenju, što je aspekt koji u kontekstu ove problematike nije po autorovim saznanjima do sada bio istražen u literaturi. Štoviše, u pravilu se u literaturi zavisnost kontaktnih pritisaka problema sa smanjenjem kontaktne površine navodi kao linearno zavisna o vanjskom opterećenju, a kontaktna površina konstantnom. Razmatranje elastičnosti utiskivača očekivano poništava te pretpostavke. Kontaktni pritisci blago nelinearno rastu s opterećenjem, a kontaktna se površina u značajnoj mjeri mijenja s opterećenjem, uz trend povećavanja nelinearnosti kako polumjer utiskivača raste. Nadalje, utvrđeno je da se za slučaj s trenjem na kontaktnoj površini između utiskivača i sloja sve točke nalaze u stanju prianjanja, što nije slučaj za kontakt sloja i podloge, gdje postoji središnja zona prianjanja omeđena dvjema širokim zonama klizanja prema rubovima kontaktne površine.

U eksperimentalnom je dijelu istraživanja primjenom optičke metode fotogramterije, zasnovane na metodi digitalne korelacije slike, ispitano ponašanje sloja debljine 0,5 mm, kojeg u podlogu pritišće utiskivač cilindričnog profila polumjera 250 mm. U mjerenjima se koristio komercijalno dostupan sustav za fotogrametriju ARAMIS 4M. Mjerenje pomaka na takvom eksperimentalnom modelu pokazuje se kao složen zadatak, koji ne samo da iziskuje pažljivu pripremu eksperimenta, već u mjerenje uvodi i neizbježne nelinearnosti i netočnosti koje narušavaju točnost mjerenja. Naime, prilikom praćenja pomaka karakterističnih točaka, praktički je nemoguće dobiti simetričan mjerni rezultat, premda bi pomaci za osno simetričan kontaktni model u idealnom slučaju trebali biti posve simetrični s obzirom na početnu točku dodira. To se odstupanje može objasniti uzimajući u obzir nekoliko faktora, od kojih je svakako najutjecajniji neravnost čeličnog lima/sloja, koja u deformacijsko ponašanje sloja uvodi neželjene nelinearnosti. Povrh toga, središte vidnog polja kamere nije moguće postaviti u savršeno poklapanje s početnom točkom dodira utiskivača i sloja, što ujedno znači da se točke na rubu vidnog polja nalaze na različitim udaljenostima od stvarne središnje točke kontakta, odnosno od osi simetrije modela utiskivača. Jednako tako, karakteristične je točke čije se pomake želi pratiti unutar sučelja programskog paketa ARAMIS potrebno odabrati ručno, pa stoga njihove koordinate nisu niti u odnosu na vidno polje kamere po apsolutnim vrijednostima identične. Ipak, s dovoljno se pažnje eventualna greška zbog ručnog odabira točaka može svesti na zanemarivo malu mjeru.

Rezultati eksperimenta i numeričke simulacije podloge, sloja i utiskivača u dobrom su slaganju kada su sile dovoljno male, što se može korelirati s posve elastičnim stadijem opterećenja. Dobivena se deformacijska forma (relativni pomaci točaka) i kvalitativno i kvantitativno dobro slaže s rezultatima eksperimenta, međutim pri većim silama počinje se uočavati sve značajnije odstupanje. S druge strane, između numeričke simulacije i eksperimenta nije postignuto dobro slaganje u pogledu apsolutnih pomaka čitave strukture, što ipak ne utječe u bitnoj mjeri na pojavu smanjenja kontaktne površine. Kao dva najizglednija uzroka ovom odstupanju apsolutnih pomaka mogu se pretpostaviti ili loša kalibracija mjernog sustava (kao i moguća dekalibracija tijekom pripreme ili samog procesa mjerenja) ili pogrešna pretpostavka o mehaničkim svojstvima materijala podloge, koja se pokazala značajno podatljivijom od modela u numeričkoj simulaciji u kojoj su bile pretpostavljene standardne vrijednosti modula elastičnosti i Poissonova broja. Eksperimentalno ispitivanje fotogrametrijskim snimanjem prvo je takve vrste u analizi ovakvih problema i usprkos spomenutim netočnostima i nepoklapanjima rezultata predstavlja pristup kojeg vrijedi razmotriti u eventualnim budućim istraživanjima u kojima bi se detaljnijim mjerenjima i razrađenijim pristupom moglo težiti povećanoj točnosti dobivenih rezultata.

Istraživanje provedeno u ovome radu može se proširiti i poboljšati na puno načina. Elasto-plastična analiza svakako je prvi korak u kojemu bi se moglo proširiti navedena razmatranja, kao i analiza cikličkih opterećenja u slučaju kontakata s trenjem. U literaturi je zadnjih godina sve zastupljenije istraživanje FGM (*functionally graded material*) komponenti u tribologiji površina, pa ta tematika nije zaobišla niti usko područje analize kontaktnih problema sa smanjenjem kontaktne površine. Također, pojava adhezije vrlo je složena pojava koja u značajnoj mjeri modificira ponašanje ovakve vrste kontakata, s obzirom da do odvajanja tijela ne dolazi kod proizvoljno malih opterećenja, već tek nakon što se nadvlada određena energija slobodne površine, čime ova problematika može ući i u domenu mehanike prijeloma. Ovakvi napredniji koncepti i razmatranja ostali su doduše izvan okvira ovog rada, koji predstavlja tek jedan mali doprinos u spektru problematike koju svakako treba smatrati vrlo raznolikom i složenom.

Popis literature

[1] Johnson, K. L.: *Contact mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[2] Man, K. W.: *Contact Mechanics using Boundary Elements*. Computational Mechanics Publications, Southampton UK and Boston USA, 1994.

[3] Siminiati, D.: *Analiza dodirnih pritisaka kod višestrukog zahvata elastičnih tijela*. Doktorska disertacija. Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 1998.

[4] Hrgović, I.: *Analiza kontaktnih naprezanja i deformacija na metalnim prevlakama*. Magistarski rad. Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2000.

[5] Becker, A. A.: *The Boundary Element Method in Engineering: A complete course*. McGraw-Hill International, Cambridge, 1992.

[6] Galin, L. A., Gladwell G. M. L. (ur.): *Contact Problems – The Legacy of L. A. Galin*. Springer Science & Business Media, 2008.

[7] Kalker, J. J.: *Variational Principles of Contact Elastostatics*. Journal of the Institute of Mathematics and its Applications 20 (1977), pp. 199-219.

[8] Kikuchi, N.; Oden, J. T.: *Contact Problems in Elasticity – A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988.

[9] Siminiati, D.: *Prilog istraživanju dodirnih pritisaka cilindričnih tijela s malim razlikama zakrivljenosti*. Magistarski rad. Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 1991.

[10] Chan, S. K.; Tuba, I. S.: *A finite element method for contact problems of solid bodies – Part I. Theory and Validation*. International Journal of Mechanical Sciences 13 (1971) 7, pp. 615-625.

[11] Chan, S. K.; Tuba, I. S.: *A finite element method for contact problems of solid bodies – Part II. Application to Turbine Blade Fastenings*. International Journal of Mechanical Sciences 13 (1971) 7, pp. 627-639.

[12] Laursen, T. A.: *Formulation and Treatment of Frictional Contact Problems Using Finite Elements*. Doktorska disertacija. Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1992.

[13] Keum, B.: *Analysis of 3-D Contact Mechanics Problems By the Finite Element and Boundary Element Methods*. Doktorska disertacija. Department of Mechanical, Industrial and Nuclear Engineering, College of Engineering, University of Cincinnati, 2003.

[14] Keum, B.; Liu, Y. *Analysis of 3-D Contact Mechanics Problems by a Boundary Element Method*. Tsinghua Science and Technology 10 (2005) 1, pp. 16-29.

[15] Landenberger, A.: *The Coupling of the FEM and the BEM for the Solution of Elastoplasticity and Contact Problems*. Doktorska disertacija. Department for Turbomachinery and Engineering Mechanics, School of Mechanical Engineering, Cranfield University, 1998.

[16] Filon, L. N. G.: *On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-Section under any System of Load, with Special Reference to Points of Concentrated or Discontinuous Loading*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A 201 (1903), pp. 63-155.

[17] Weitsman, Y.: *On the Unbonded Contact Between Plates and an Elastic Half Space*. Transactions of the ASME – Journal of Applied Mechanics 36 (1969) 4, Series E, pp. 198-202.

[18] Pu, S. L.; Hussain, M. A.: *Note on the Unbonded Contact Between Plates and an Elastic Half Space*. Transactions of the ASME – Journal of Applied Mechanics 37 (1970) 3, Series E, pp. 859-861.

[19] Dundurs, J.; Stippes, M.: *Role of Elastic Constants in Certain Contact Problems*. Transactions of the ASME – Journal of Applied Mechanics 37 (1970) 4, Series E, pp. 965-970.

[20] Weitsman, Y.: *A tensionless contact between a beam and an elastic half space*. International Journal of Engineering Science 10 (1972) 1, pp. 73-81.

[21] Keer, L. M.; Dundurs, J.; Tsai, K. C.: *Problems Involving a Receding Contact Between a Layer and a Half Space*. Transactions of the ASME – Journal of Applied Mechanics 39 (1972) 4, Series E, pp. 1115-1120.

[22] Tsai, K. C.; Dundurs, J.; Keer, L. M.: *Elastic Layer Pressed Against a Half Space*. Transactions of the ASME – Journal of Applied Mechanics 41 (1974) 3, Series E, pp. 703-707.

[23] Gladwell, G. M. L.: *On Some Unbonded Contact Problems in Plane Elasticity Theory*. Transactions of the ASME – Journal of Applied Mechanics 43 (1976) 3, Series E, pp. 263-267.

[24] Ratwani, M.; Erdogan, F.: *On the plane contact problem for a frictionless elastic layer*. International Journal of Solids and Structures 9 (1973) 8, pp. 921–936.

[25] Civelek, M. B.; Erdogan, F.: *The axisymmetric double contact problem for a frictionless elastic layer*. International Journal of Solids and Structures 10 (1974) 6, pp. 639-659.

[26] Erdogan, F.; Ratwani, M.: *The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes*. Transactions of the ASME – Journal of Applied Mechanics 41 (1974) 3, Series E, pp. 673-678.

[27] Gecit, M. R.; Erdogan, F.: *Frictionless contact problem for an elastic layer under axisymmetric loading*. International Journal of Solids and Structures 14 (1978) 9, pp. 771-785.

[28] Garrido, J. A.; Foces, A.; Paris F.: *B.E.M. applied to receding contact problems with friction*. Mathematical and Computer Modelling 15 (1991) 3-5, pp. 143-153.

[29] Garrido, J. A.; Lorenzana A.: *Receding contact problem involving large displacements using the BEM*. Engineering Analysis with Boundary Elements 21 (1998), pp. 295-303.

[30] Kauzlarich, J. J.; Greenwood, J. A.: *Contact between a centrally loaded plate and a rigid or elastic base, with application to pivoted pad bearings*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 215 (2001) 6, pp. 623-628.

[31] Aksogan, O.; Akavci, S. S.; Arslan, H. M.: *An integral transform technique applied to unbonded contact problems of a layer*. Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B 28 (2004) B1, pp. 1-8.

[32] Comez, I.; Birinci, A.; Erdol, R.: *Double receding contact problem for a rigid stamp and two elastic layers*. European Journal of Mechanics A/Solids 23 (2004), pp. 301-309.

[33] El-Borgi, S.; Abdelmoula, R.; Keer L.: *A receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogenous substrate*. International Journal of Solids and Structures 43 (2006), pp. 658-674.

[34] Kahya, V.; Ozsahin, T. S.; Birinci, A.; Erdol, R.: *A receding contact problem for an anisotropic elastic medium consisting of a layer and a half plane*. International Journal of Solids and Structures 44 (2007), pp. 5695-5710.

[35] Rhimi, M.; El-Borgi, S.; Ben Saïd, W.; Ben Jemaa, F.: *A receding contact axisymmetric problem between a functionally graded layer and a homogenous substrate*. International Journal of Solids and Structures 46 (2009), pp. 3633-3642.

[36] Comez, I.: *Frictional contact problem for a rigid cylindrical stamp and an elastic layer resting on a half plane*. International Journal of Solids and Structures 47 (2010), pp. 1090-1097.

[37] Ahn, Y. J.; Barber, J. R.: *Response of frictional receding contact problems to cyclic loading*. International Journal of Mechanical Sciences 50 (2008), pp. 1519-1525.

[38] Ahn, Y. J.: *Response of coupled frictional contacts to cyclic loading*. Doktorska disertacija. University of Michigan, 2009.

[39] Stippes, M.; Wilson, H.; Krull, F. N.: *A contact stress problem for a smooth disk in an infinite plate*. Proc. of the 4th US National Congress of Applied Mechanics, ASME, 1962., pp. 799-806.

[40] Margetson, J.; Morland, L. W.: *Separation of smooth circular inclusions from elastic and viscoelastic plates subjected to uniaxial tension*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 18 (1970) 4, pp. 295-309.

[41] Ghosh, S. P.; Dattaguru, B.; Rao, A. K.: *Load Transfer from a Smooth Elastic Pin to a Large Sheet*. AIAA Journal 19 (1981) 5, pp. 619-625.

[42] Ghosh, S. P.; Dattaguru, B.; Rao, A. K.: *Photoelastic Studies on Progress of Separation in Interference Fits*. Experimental Mechanics 22 (1982) 1, pp. 8-15.

[43] Mangalgiri, P. D.; Ramamurthy, T. S.; Dattaguru, B.; Rao, A. K.: *Elastic analysis of pin joints in plates under some combined pin and plate loads*. International Journal of Mechanical Sciences 29 (1987) 8, pp. 577-585.

[44] Satish Kumar, K.; Dattaguru, B.; Ramamurthy, T. S.; Raju, K. N.: *Elasto-plastic contact stress analysis of joints subjected to cyclic loading*. Computers and Structures 60 (1996), pp. 1067-1077.

[45] de Jong, T.: *On the calculation of stresses in pin-loaded anisotropic plates*. Doktorska disertacija, Technishe Universiteit Delft, 1987.

[46] Murthy, A. V.; Dattaguru, B.; Narayana, H. V. L.; Rao, A. K.: *Stress and Strength Analysis of Pin Joints in Laminated Anisotropic Plates*. Composite Structures 19 (1991), pp. 299-312.

[47] Camanho, P. P.; Matthews, F. L.: *Stress analysis and strength prediction of mechanically fastened joints in FRP: a review*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 28A (1997), pp. 529-547.

[48] Ciavarella, M.; Decuzzi, P.: *The state of sress induced by the plane frictionless cylindrical contact. I. The case of elastic similarity*. International Journal of Solids and Structures 38 (2001), pp. 4507-4523.

[49] Ciavarella, M.; Decuzzi, P.: *The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact. II. The general case (elastic dissimilarity)*. International Journal of Solids and Structures 38 (2001), pp. 4525-4533.

[50] Ho, K. C.; Chau, K. T.: *An infinite plane loaded by a rivet of a different material*. International Journal of Solids and Structures 34 (1997) 19, pp. 2477-2496.

[51] Iyer, K.: *Solutions for contact in pinned connections*. International Journal of Solids and Structures 38 (2001), pp. 9133-9148.

[52] Hou, J. P.; Hills, D. A.: *Contact between a pin and a plate with a hole under interference-fit and clearance-fit conditions*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 215 (2001) 6, pp. 629-639.

[53] Hou, J. P.; Hills, D. A.: *Interference contact between a pin and plate with a hole*. Journal of Strain Analysis for Engineering Design 36 (2001) 5, pp. 499-506.

[54] Hou, J. P.; Hills, D. A.: *The effect of friction on a receding conformal contact*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 216 (2002) 3, pp. 337-342.

[55] Ciavarella, M.; Baldini, A.; Barber, J. R.; Strozzi, A.: *Reduced dependence on loading parameters in almost conforming contacts*. International Journal of Mechanical Sciences 48 (2006), pp. 917-925.

[56] Mijar, A. R.; Arora, J. S.: *Review of formulations for elastostatic frictional contact problems*. Structural and Multidisciplinary Optimization 20 (2000) 3, pp. 167-189.

[57] Refaat, M. H.; Meguid, S. A.: *On the elastic solution of frictional contact problems using variational inequalities*. International Journal of Mechanical Sciences 36 (1994) 4, pp. 329-342.

[58] Cournier, A.: *Unilateral contact – mechanical modelling*. Iz knjige: *New Developments in Contact Problems*, Wriggers, P.; Panagoitopoulos, P. (ur.), CISM courses and lectures no. 384, 1999, Udine. pp. 1-54.

[59] Mijar, A. R.; Arora, J. S.: *An augmented Lagrangian optimization method for contact analysis problems, 1: formulation and algorithm*. Structural and Multidisciplinary Optimization 28 (2004), pp. 99-112.

[60] Wriggers, P.; Nackenhorst, U.: *Analysis and Simulation of Contact Problems*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol. 27, Springer-Verlag, 2006.

[61] Arora, J. S.: *Introduction to Optimum Design, 2nd Ed*. Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.

[62] Nocedal, J.; Wright, S. J.: *Numerical Optimization, 2nd Ed*. Springer Science+Bussines Media, New York, 2006.

[63] Luenberger, D.; Ye, Y.: *Linear and Nonlinear Programming, 3rd Ed*. Springer Science+Bussines Media, New York, 2008.

[64] Bednarek, T.; Kowalczyk, P.: *Improvement of penalty approach in contact modeling*. Proceedings of Computer Methods in Mechanics CMM-2011, 09.-12.05.2011., Varšava, Poljska, 2011.

[65] Bednarek, T.; Kowalczyk, P.; Marczewski, A.; Sosnowski, W.: *Improvement of stability conditions and uniqueness of penalty approach in contact modelling in sheet metal forming*. Computer Methods in Materials Science 11 (2011) 2, pp. 411-417.

[66] Cavalieri, F. J.; Cardona, A.; Fachinotti, V. D.; Risso, J.: *A finite element formulation for nonlinear 3D contact problems*. Mecánica Computacional XXVI, 2007, pp. 1357-1372.

[67] Vulović, S.; Živković, M.; Grujović, N.; Slavković, R.: *A Comparative Study of Contact Problems Solution Based on the Penalty and Lagrange Multipliers Approaches*. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics 1 (2007) 1, pp. 174-183.

[68] Mijar, A. R.; Arora, J. S.: *An augmented Lagrangian optimization method for contact analysis problems, 2: numerical evaluation*. Structural and Multidisciplinary Optimization 28 (2004), pp. 113-126.

[69] Sorić, J.: *Metoda konačnih elemenata*. Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[70] Brnić, J.; Čanađija, M.: *Analiza deformabilnih tijela metodom konačnih elemenata*. Fintrade & Tours + Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2009.

[71] Bathe, K.-J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.

[72] Obsieger, B.: *Metoda rubnih elemenata I*. Zigo, Rijeka, 2003.

[73] MSC.Software Corporation: *MSC.Nastran Qick Reference Guide*, 2003.

[74] Allahabadi, R.: *Three dimensional slide line contact*. MSC 1993 World User's Conference Proceedings, 1993.

[75] Brčić, M.; Čanađija, M.: *Stress and strain analysis of an axial below*. Engineering Review 29 (2009) 1, pp. 61-70.

[76] Brebbia, C. A.; Dominguez, J.: *Boundary Elements – An Introductory Course, 2nd Edition*. WIT Press, Southampton, 1998.

[77] GOM mbH: *ARAMIS User Manual – Software*. GOM mbH, 2007.

[78] Vendroux, G.; Knauss, W. G.: *Submicron Deformation Field Measurements II: Improved Digital Image Correlation*. Experimental Mechanics 36 (1998) 2, pp. 86-92.

[79] Yoneyama, S.; Murasawa, G.: *Digital Image Correlation*. Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS) – Experimental Mechanics, 2007.

[80] Su, C.; Anand, L.: *A new digital image correlation algorithm for whole-field displacement measurement*. Mechanical Engineering (2003) 5.

[81] Yang, L.; Smith, L.; Gothekar, A.; Chen, X.: *Measure Strain Distribution Using Digital Image Correlation (DIC) for Tensile Tests*. Final report to The Advanced High Strength Steel Stamping Team of the Auto/Steel Partnership (A/S P), 2010.

[82] Tong, W.: *An Evaluation of Digital Image Correlation Criteria for Strain Mapping Applications*. Strain (2005) 41, pp. 167-175.

[83] Fazzini, M.; Robert, L.; Mistou, S.; Dalverny, O.: *Study of image characteristics on Digital Image Correlation error assessment*. Proceedings of the XIth International Congress and Exposition, Society for Experimental Mechanics. Orlando, Florida USA, 2-5 June, 2008.

[84] Quarteroni, A.; Sacco, R.; Saleri, F.: *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[85] Bakić, A.: *Suvremene optičke metode u eksperimentalnoj mehanici*. Predavanje u organizaciji Hrvatskog društva za mehaniku (HDM), PowerPoint prezentacija, 2011.

[86] GOM mbH: *ARAMIS User Information – Hardware*. GOM mbH, 2008.

Popis oznaka i simbola

Oznaka	*Jedinica*	*Značenje*
a	mm	poluširina kontakta (utiskivača sa slojem)
A	-	proizvoljna točka tijela
b	mm	poluširina kontakta (elastičnog sloja i podloge)
B	mm	širina ploče, širina podloge
c	-	koeficijent iterativnog povećavanja penalizirajuće vrijednosti
C	-	korelacijski koeficijent
C_{ijkl}	-	tenzor elastičnih konstanti
d	mm	zračnost/razmak čvorova (točaka) na kontaktnim površinama
D	mm	debljina čahure
e_j	-	jedinični vektor na j-toj koordinatnoj osi
E	GPa	modul elastičnosti
$f(x,y)$	-	intenzitet sive boje u točki/pikselu na nedeformiranoj konfiguraciji
$\bar{f}$	-	srednja vrijednost matrice **F**
$f_{\mathrm{V}i}$	N	volumenska sila u smjeru osi i
$\mathbf{F}$	-	matrica vrijednosti intenziteta sive boje na nedeformiranoj faceti
F_{T}	N	sila trenja
$g(x',y')$	-	intenzitet sive boje u točki/pikselu na deformiranoj konfiguraciji
$\bar{g}$	-	srednja vrijednost matrice **G**
G	GPa	modul smicanja
$\mathbf{G}$	-	matrica vrijednosti intenziteta sive boje na deformiranoj faceti
h	mm	debljina elastičnog sloja
H	mm	(1) visina ploče ; (2) visina podloge
$\mathbf{H}$	-	Hessova matrica
J_{ij}	-	Jakobijeva matrica
k	-	redni broj koraka iteracije u Newtonovoj metodi
K	-	konstanta integracije
$\mathbf{K}_{\mathrm{k}}$	-	kontaktna matrica krutosti
L	mm	duljina master segmenta
$\mathcal{L}$	-	Lagrangeova funkcija

$\mathcal{L}_p$	-	proširena Lagrangeova funkcija
m	-	broj piksela facete u vertikalnom smjeru (broj redaka matrica **F** i **G)**
M	-	središnja (mjerna) točka facete
$M_{1,2}$	-	prvi i drugi master čvor u tročvornom slide line elementu
n	-	broj piksela facete u smjeru horizontale (broj stupaca matrica **F** i **G)**
$\mathbf{n}$	-	vektor normale
n_i	-	komponenta vektora normale
N	-	broj piksela u jednom stupcu unutar čitavog vidnog polja kamere
N^k	-	interpolacijska funkcija za *k*-ti čvor
p_n	MPa	normalni kontaktni pritisak
p_t	MPa	tangencijalni kontaktni pritisak
p_1	MPa	kontaktni pritisak između utiskivača i sloja i između ploče i čahure
p_2	MPa	kontaktni pritisak između sloja i podloge i između čahure i svornjaka
p_{max}	MPa	maksimalna vrijednost normalnog kontaktnog pritiska
$\mathbf{p}_\delta$	-	vektor rezidualne sile u penalty metodi
P_n	N	normalna sila
P_t	N	tangencijalna sila
Q	-	točka u kojoj se promatra utjecaj sile
r	mm	(1) udaljenost točaka T i Q ; (2) rezolucija fotogrametrijskog sustava
R	mm	(1) polumjer zakrivljenosti tijela u točki dodira ; (2) polumjer utiskivača ; (3) polumjer svornjaka
R_e	MPa	naprezanje na granici elastičnosti
s	-	dopunska (*slack*) varijabla
S	-	slave čvor u tročvornom slide line elementu
S_m	-	*m*-ti rubni element
SB	-	broj nijansi sive boje u pikselu
t	s	vrijeme
$\mathbf{t}$	-	vektor tangente
t_i	MPa	površinske sile
T	-	točka u kojoj se primjenjuje sila
T_{ij}	-	tenzorska komponenta osnovnog rješenja za sile
u_i	mm	komponenta pomaka duž koordinatne osi *i*
$\bar{u}_i$	mm	komponenta pomaka duž osi *i* točke na površini tijela
U_{ij}	-	tenzorska komponenta osnovnog rješenja za pomake

$\mathbf{v}$	-	vektor optimizacijskih parametara (pomaka i njihovih gradijenata) kod digitalne korelacije slike
v_i	-	*i*-ta komponenta vektora $\mathbf{v}$
$\mathbf{V}$	-	Galerkinov vektor
V_i	-	*i*-ta komponenta Galerkinovog vektora
VPK	mm	dimenzija vidnog polja kamere
x, y, z	-	osi koordinatnog sustava, koordinate točke (u nedeformiranom stanju)
x', y'	mm	fotogrametrijski dobivene koordinate točke u deformiranom stanju
$\widetilde{x}, \widetilde{y}$	-	bezdimenzijske interpolirane koordinate na pikselima
z	mm	udaljenost točke T od koordinatne osi x_2
Y	-	preslikavanje iz nedeformirane u deformiranu konfiguraciju
β_{mn}	-	koeficijent funkcije za interpolaciju intenziteta sive boje
Γ	-	rub domene
Γ_c	-	dio ruba domene koji čini kontaktnu površinu
Γ_t	-	dio ruba na kojemu su zadane površinske sile
Γ_u	-	dio ruba na kojemu su zadani pomaci
δ_{ij}	-	jedinični (Kroneckerov) tenzor
δ_n,	mm	normalni pomak (prodor) čvora na kontakntoj površini
δ_t	mm	tangencijalni (klizanje) pomak čvora na kontaktnoj površini
ϕ	-	funkcija aproksimacije nederivabilnog člana tangencijalnih sila
ε_{ij}	-	tenzor deformacije, tenzorska komponenta deformacije
ε_n, ε_t	N/mm	penalizirajuće vrijednosti
ε_r	-	koeficijent derivabilne aproksimacije izraza za sile trenja
φ	rad, ^{o}	kontaktni kut između svornjaka i ploče
φ_{lim}	rad, ^{o}	asimptotska vrijednost kontaktnog kuta pri velikim opterećenjima
η, ξ	-	prirodne (lokalne) koordinate
κ_{ij}	-	konstantni tenzor
λ	-	Lagrangeov multiplikator
μ	-	koeficijent trenja
ν	-	Poissonov broj
Ω	-	domena integracije
π	-	modifikacija ukupnog potencijala penalizirajućom funkcijom
Π	-	ukupna potencijalna energija

ρ	mm	polumjer kružnice kojom se u MRE isključuje iz područja integracije točku T
σ	MPa	normalno naprezanje
σ_e	MPa	ekvivalentno von Misesovo naprezanje
σ_{ij}	-	tenzor naprezanja, komponenta naprezanja
$\sigma_{s.o.}$	-	stupanj opterećenja u odnosu na ukupno zadano opterećenje
τ	MPa	tangencijalno naprezanje
ξ^n	-	*n*-ti čvor u konačnom elementu
ψ	-	pseudopotencijal kontaktnih sila (inidikator funkcija)
$\overline{\psi}$	-	pseudopotencijal tangencijalnih kontaktnih sila, konjugirana funkcija inidikator funkcije

Popis slika

Sl. 1. Primjeri nekonformnih kontakata: a) zahvat zupčanika s vanjskim ozubljenjem, b) dodir valjaka/kuglica i valjnih staza u valjnom ležaju 4

Sl. 2. Primjer konformnog kontakta – vratilo u kliznom ležaju ili svornjak u ploči 5

Sl. 3. Primjer Hertzova kontakta – dva valjka s paralelnim osima i karakteristična eliptična raspodjela kontaktnih pritisaka 6

Sl. 4. Slučaj smanjenja kontaktne površine za: a) svornjak u ploči, b) elastični sloj pritisnut u podlogu 8

Sl. 5. Komponente naprezanja za slučaj ravninskog stanja deformacije za poznatu raspodjelu normalnih i tangencijalnih kontaktnih opterećenja na elastičnom poluprostoru 11

Sl. 6. Signorinijev problem; Γ_c – dio ruba domene tijela Ω koji predstavlja potencijalnu kontaktnu površinu, Γ_t – dio ruba gdje su zadane površinske sile, Γ_u – dio ruba gdje su zadani pomaci 28

Sl. 7. Zakon jednostranog normalnog kontakta 29

Sl. 8. Kontaktni uvjeti za problem s pojavom trenja: a) zakon jednostranog kontakta, b) Coulombov zakon trenja 31

Sl. 9. Derivabilna aproksimacija funkcije $|u_t|$ 32

Sl. 10. Grafički prikaz za: (a) pseudopotencijal kontaktnih sila, (b) subdiferencijal pseudopotencijala – zakon jednostranog normalnog kontakta 33

Sl. 11. Coulombov zakon trenja: a) indikator funkcija, b) konjugirana (dualna) funkcija, c) subdiferencijal konjugirane funkcije 34

Sl. 12. Osnovni koncept dijagrama toka iterativnih numeričkih procedura za rješavanje kontaktnih problema; prikazani se postupak ponavlja za svaki inkrement opterećenja 42

Sl. 13. Definiranje slide line elementa; strelice duž slave i master linije naznačuju smjer i redoslijed kojim se definiraju slave i master čvorovi [73] 49

Sl. 14. Tročvorni slide line element: ξ, ξ_0 – trenutna i prethodna prirodna koordinata, δ_n – prodor slave čvora u master segment, δ_t – klizanje slave čvora po master segmentu 49

Sl. 15. Linearna aproksimacija nepoznate funkcije 53

Sl. 16. Dvodimenzionalna domena Ω ; T – točka u unutrašnjosti domene iz koje se promatra utjecaj sile, Q – točka na rubu Γ domene u kojoj se promatra utjecaj sile u točki T, ρ - proizvoljno malen polumjer kružnice u okolici točke T, koju se isključuje iz područja integracije 57

Sl. 17. Princip postavljanja sustava linearnih jednadžbi 62

Sl. 18. Primjer kontaktnog problema; Γ_{nc} je dio ruba preko kojeg se ne ostvaruje kontakt... 64

Sl. 19. Problem svornjaka u provrtu opterećene ploče 70

Sl. 20. Detalj mreže u blizini kontaktne površine svornjaka i ploče 71

Sl. 21. Konturni prikaz normalnih naprezanja σ_r [Pa] u cilindričnom koordinatnom sustavu za svornjak; a) za puni raspon dobivenih vrijednosti, b) raspon s maksimumom u nuli... 71

Sl. 22. Problem opterećenog svornjaka u provrtu ploče.. 72

Sl. 23. Konturni prikaz normalnih naprezanja σ_r [Pa] u cilindričnom koordinatnom sustavu za ploču; maksimum je postavljen na nultu vrijednost radi isticanja kontaktnog kuta 73

Sl. 24. Detalj mreže konačnih elemenata uz čahuru i svornjak za D/R = 0,1; model ima ukupno 27924 elementa i 28660 čvorova.. 74

Sl. 25. Konturni prikaz normalnih naprezanja σ_r [Pa] na smjeru osi polumjera u cilindričnom koordinatnom sustavu na detalju čahure... 75

Sl. 26. Raspodjela kontaktnih pritisaka između ploče i čahure; $p_{n1,max}/\sigma \approx 0{,}61$, $\varphi_1 \approx 22°$.. 75

Sl. 27. Raspodjela kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka; $p_{n2,max}/\sigma \approx 0{,}666$, $\varphi_2 \approx 23{,}4°$.. 76

Sl. 28. Rezultati za različite stadije opterećenja za D/R = 0,1; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između ploče i čahure, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka.. 77

Sl. 29. Utjecaj intenziteta opterećenja na vrijednosti maksimalnih kontaktnih pritisaka za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer D/R 78

Sl. 30. Utjecaj intenziteta opterećenja na vrijednosti kontaktnog kuta φ_1 za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer D/R.. 78

Sl. 31. Utjecaj intenziteta opterećenja na vrijednosti kontaktnog kuta φ_2 za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer D/R.. 79

Sl. 32. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava ploče; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između ploče i čahure, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka.. 80

Sl. 33. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava čahure; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između ploče i čahure, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka.. 81

Sl. 34. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava svornjaka; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između ploče i čahure, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između čahure i svornjaka.. 82

Sl. 35. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju D/R = 0,1; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između ploče i čahure, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između čahure i svornjaka ... 83

Sl. 36. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju D/R = 0,2; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između ploče i čahure, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između čahure i svornjaka....83

Sl. 37. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju D/R = 0,5; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između ploče i čahure, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između čahure i svornjaka....84

Sl. 38. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju D/R = 1; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između ploče i čahure, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između čahure i svornjaka....85

Sl. 39. Problem utiskivača, sloja i podloge....86

Sl. 40. Detalj mreže u okolici početnih točki dodira; podloga i utiskivač su zbog što pravilnijeg strukturiranja mreže podijeljeni u više od jedne međusobno povezane površine....87

Sl. 41. Konturni prikaz raspodjele normalnog naprezanja σ_y na čitavom modelu za R/h = 50....87

Sl. 42. Raspodjela kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja za R/h = 50; $p_{n1,max}/\sigma \approx 11$, $a/h \approx 1,29$....88

Sl. 43. Raspodjela kontaktnih pritisaka između sloja i podloge za R/h = 50; $p_{n2,max}/\sigma \approx 9,35$, $b/h \approx 1,78$....88

Sl. 44. Rezultati za različite stadije opterećenja za R/h = 50; a) raspodjele kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između sloja i podloge....89

Sl. 45. Utjecaj intenziteta opterećenja na vrijednosti maksimalnih kontaktnih pritisaka za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer R/h....90

Sl. 46. Utjecaj intenziteta opterećenja na širine kontaktnih površina za sve geometrije; oznake krivulja odnose se na omjer R/h....91

Sl. 47. Rezultati za promjene svojstava materijala utiskivača: a) raspodjele kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između sloja i podloge....92

Sl. 48. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava sloja: a) raspodjele kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između sloja i podloge....93

Sl. 49. Rezultati za promjene mehaničkih svojstava podloge: a) raspodjele kontaktnih pritisaka između utiskivača i sloja, b) raspodjele kontaktnih pritisaka između sloja i podloge....94

Sl. 50. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju R/h = 50; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između utiskivača i sloja, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između sloja i podloge....95

Sl. 51. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju R/h = 100; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između utiskivača i sloja, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između sloja i podloge....96

Sl. 52. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju R/h = 200; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između utiskivača i sloja, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između sloja i podloge 97

Sl. 53. Rezultati za kontakt s trenjem za geometriju R/h =500; a) raspodjele normalnog p_{n1} i tangencijalnog p_{t1} kontaktnog pritiska između utiskivača i sloja, b) raspodjele normalnog p_{n2} i tangencijalnog p_{t2} kontaktnog pritiska između sloja i podloge 97

Sl. 54. Primjeri stohastičkih rastera: a) neprikladan raster s vrlo slabim kontrastom, b) raster s dobrim kontrastom i prevelikim jednobojnim područjima, c) raster s dobrim uzorkom i kontrastom (preuzeto iz [77]) 100

Sl. 55. Facete dimenzija 15×15 piksela s korakom od 13 piksela (2 piksela preklapanja); standardna postavka u softveru ARAMIS (preuzeto iz [77]) 101

Sl. 56. Faceta u nedeformiranoj i deformiranoj konfiguraciji 103

Sl. 57. Područje interpolacije (osjenčano) određeno je s četiri piksela; vrijednosti se za svaki piksel uzimaju na koordinatama njegova geometrijskog središta 105

Sl. 58. Mjerna nesigurnost u ovisnosti o veličini facete (preuzeto iz [85]) 106

Sl. 59. Eksperimentalni model: (1) sloj, (2) podloga, (3) utiskivač cilindričnog profila, (4) prihvat za čeljusti kidalice 107

Sl. 60. Eksperimentalni sustav spreman za opterećivanje i fotogrametrijsko snimanje 108

Sl. 61. Model podloge i utiskivača prilikom kalibracije s kalibracijskim objektom postavljenim na podlozi; na modelima je vidljiv naneseni stohastički raster 109

Sl. 62. Karakteristične točke na sloju – za svaku točku tablica prikazuje referentan i stvaran položaj točke (njihove x, y i z koordinate) te razliku tih dviju vrijednosti 111

Sl. 63. Prikaz mjernih rezultata za P_{max} = 1500 N; konturni prikaz polja pomaka prikazan je za t = 25 s, što otprilike odgovara intenzitetu opterećenja P = 1070 N 112

Sl. 64. Numerički model eksperimentalnog modela 113

Sl. 65. Razlika y pomaka točaka 2 i 3 za stadij opterećenja P = 500 N iznosi $\Delta y \approx 1{,}35\ \mu m$, za eksperiment $\Delta y_E \approx 1{,}4\ \mu m$; relativno odstupanje $(1 - \Delta y/\Delta y_E) \approx 3{,}6\%$ 114

Sl. 66. Razlika y pomaka točaka 2 i 3 za stadij opterećenja P = 1000 N iznosi $\Delta y \approx 2{,}4\ \mu m$, za eksperiment $\Delta y_E \approx 1{,}4\ \mu m$; relativno odstupanje $(1 - \Delta y/\Delta y_E) \approx 9{,}6\%$ 114

Sl. 67. Razlika y pomaka točaka 2 i 3 za stadij opterećenja P = 1500 N iznosi $\Delta y \approx 3{,}45\ \mu m$, za eksperiment $\Delta y_E \approx 5\ \mu m$; relativno odstupanje $(1 - \Delta y/\Delta y_E) \approx 31\%$ 115

Sl. A1. Grafički prikaz: a) nederivabilne funkcije, b) njene derivacije i subdiferencijala za $k \to \infty$ 137

Sl. C1. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za različite intenzitete opterećenja analogno slici 28 za geometrije D/R = 0,2 (a i b), D/R = 0,5 (c i d) i D/R = 1 (e i f) 140

Sl. C2. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju D/R = 0,2 analogno slikama 32-34 za različita svojstva materijala ploče (a i b), čahure (c i d) i svornjaka (e i f)......141

Sl. C3. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju D/R = 0,5 analogno slikama 32-34 za različita svojstva materijala ploče (a i b), čahure (c i d) i svornjaka (e i f)......142

Sl. C4. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju D/R = 1 analogno slikama 32-34 za različita svojstva materijala ploče (a i b), čahure (c i d) i svornjaka (e i f)......143

Sl. D1. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za različite intenzitete opterećenja analogno slici 44 za geometrije R/h = 100 (a i b), R/h = 200 (c i d) i R/h = 500 (e i f)......144

Sl. D2. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju R/h = 100 analogno slikama 47-49 za različita svojstva materijala utiskivača (a i b), sloja (c i d) i podloge (e i f)......145

Sl. D3. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju R/h = 200 analogno slikama 47-49 za različita svojstva materijala utiskivača (a i b), sloja (c i d) i podloge (e i f)......146

Sl. D4. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju R/h = 500 analogno slikama 47-49 za različita svojstva materijala utiskivača (a i b), sloja (c i d) i podloge (e i f)......147

Popis tablica

Tab. 1. *Provjera kontakta* ... 67

Tab. 2. *Utvrđivanje kontaktnog stanja* ... 67

Tab. 3. *Usporedba rezultata za svornjak u opterećenoj ploči* ... 72

Tab. 4. *Usporedba rezultata za opterećeni svornjak u ploči* ... 73

Tab. 5. *Analize s različitim vrijednostima elastičnih konstanti* ... 79

Tab. 6. *Utjecaj parametara faceta na mjerenje [77]* ... 102

Tab. 7. *Osnovne karakteristike sustava ARAMIS 4M [86]* ... 107

Prilozi

Prilog A. Subdiferencijal nederivabilne funkcije

Koncept subdiferencijala nederivabilne funkcije za potrebe primjene u kontaktnoj mehanici korisno je objasniti na primjeru tzv. *indikator funkcije*, koja se zove i *karakteristična funkcija,* definirane nad domenom R^+. Neka je funkcija $\psi(x)$ definirana sljedećim izrazom:

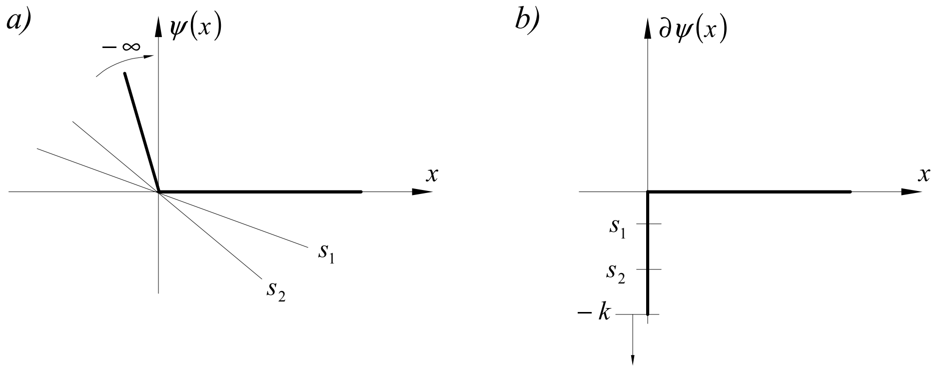
$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0, \\ +\infty & , x < 0. \end{cases} \tag{A.1}$$

Tako definiranu funkciju može se shvatiti kao limes funkcije $\tilde{\psi}$, prikazane na slici A1.a, za slučaj kada $k \to \infty$:

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0, \\ -kx & , x < 0. \end{cases} \tag{A.2}$$

Derivacija funkcije $\tilde{\psi}$, grafički prikazana na slici A1.b za $k \to \infty$, određena je izrazom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0, \\ -k & , x < 0. \end{cases} \tag{A.3}$$



Sl. A1. Grafički prikaz: a) nederivabilne funkcije, b) njene derivacije i subdiferencijala za $k \to \infty$

Funkcija iz izraza (A.2) nije derivabilna u ishodištu, ali se na temelju jednoznačno određene derivacije lijevo i desno od ishodišta derivaciju u ishodištu može definirati kao skup koji sadrži vrijednosti sadržane u intervalu $[0, -k]$, koji se naziva subdiferencijalom funkcije $\tilde{\psi}$ u ishodištu i označava ga se $\partial\tilde{\psi}(0)$, a svaki element s subdiferencijala, odnosno vrijednost unutar intervala $[0, -k]$, naziva se subgradijentom [56]. U geometrijskom smislu, subgradijent funkcije u promatranoj točki odgovara vrijednosti koeficijenta smjera (gradijenta) svakog pravca koji se nalazi između dviju graničnih tangenti funkcije u toj točki pa je stoga, sukladno danoj definiciji, subdiferencijal skup koji sadrži gradijente svih takvih tangenti.

Subdiferencijal se posve općenito u proizvoljnoj točki x_s definira kao

$$\partial\tilde{\psi}(x_s)=\{s|\,\tilde{\psi}(x)\geq\tilde{\psi}(x_s)+s(x-x_s)\}. \tag{A.4}$$

U graničnom slučaju kada vrijedi $k\to\infty$, funkcija $\tilde{\psi}(x)$ prelazi u $\psi(x)$ i subdiferencijal $\partial\psi(x)$ funkcije iz izraza (A.1) definiran je kao

$$\begin{aligned}&\partial\psi(x)=0 \quad ,x>0,\\ &\partial\psi(0)=[0,-\infty),\\ &\partial\psi(x)=\varnothing \quad ,x<0,\end{aligned} \tag{A.5}$$

a subgradijent se može zapisati kao

$$s\in\partial\psi(x). \tag{A.6}$$

Veliku važnost uz pojmove subdiferencijala i subgradijenta ima i konjugirana (dualna) funkcija $\overline{\psi}(s)$, koja je po definiciji određena kao

$$\overline{\psi}(s)=\sup_{x\in\mathrm{R}}[sx-\psi(x)]. \tag{A.7}$$

Prilog B. Betti-Maxwellov teorem

Pretpostave li se dva para kontinuiranih i derivabilnih polja pomaka i naprezanja (u_i, σ_{ij}) i $(\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij})$ u elastičnom tijelu čiji je tenzor elastičnosti C_{ijkl} simetričan s obzirom na indekse *i-j*, *k-l* i parove indeksa *ij-kl*, potrebno je razmotriti kako se primjenom Gaussova poučka može transformirati integral I oblika

$$I = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \tilde{\sigma}_{ij} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \tilde{\sigma}_{ij} \right) \right] \mathrm{d}\Omega \,. \tag{B.1}$$

Primjenom pravila o deriviranju umnoška na pribrojnike u podintegralnoj funkciji u (B.1) i zatim primjenom Gaussova poučka, iz izraza (B.1) slijedi

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tilde{\sigma}_{ij} + u_i \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} - \tilde{u}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \left(u_i \tilde{\sigma}_{ij} n_j - \tilde{u}_i \sigma_{ij} n_j \right) \mathrm{d}\Gamma \,. \tag{B.2}$$

Uzimajući u obzir Cauchyjeve jednadžbe ravnoteže $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = -f_{\mathrm{V}i}$, kao i da mora vrijediti relacija $\sigma_{ij} n_j = t_i$, izraz (B.2) postaje

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \tilde{u}_i f_{\mathrm{V}i} - u_i \tilde{f}_{\mathrm{V}i} \right) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \left(u_i \tilde{t}_i - \tilde{u}_i t_j \right) \mathrm{d}\Gamma \,. \tag{B.3}$$

S obzirom na svojstva simetrije tenzora C_{ijkl}, prva se dva člana na lijevoj strani izraza (B.3) poništavaju pa se konačno dobiva

$$\int_{\Omega} \left(\tilde{u}_i f_i - u_i \tilde{f}_i \right) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \left(u_i \tilde{t}_i - \tilde{u}_i t_j \right) \mathrm{d}\Gamma \,, \tag{B.4}$$

što predstavlja puni oblik Betti-Maxwellovog teorema.

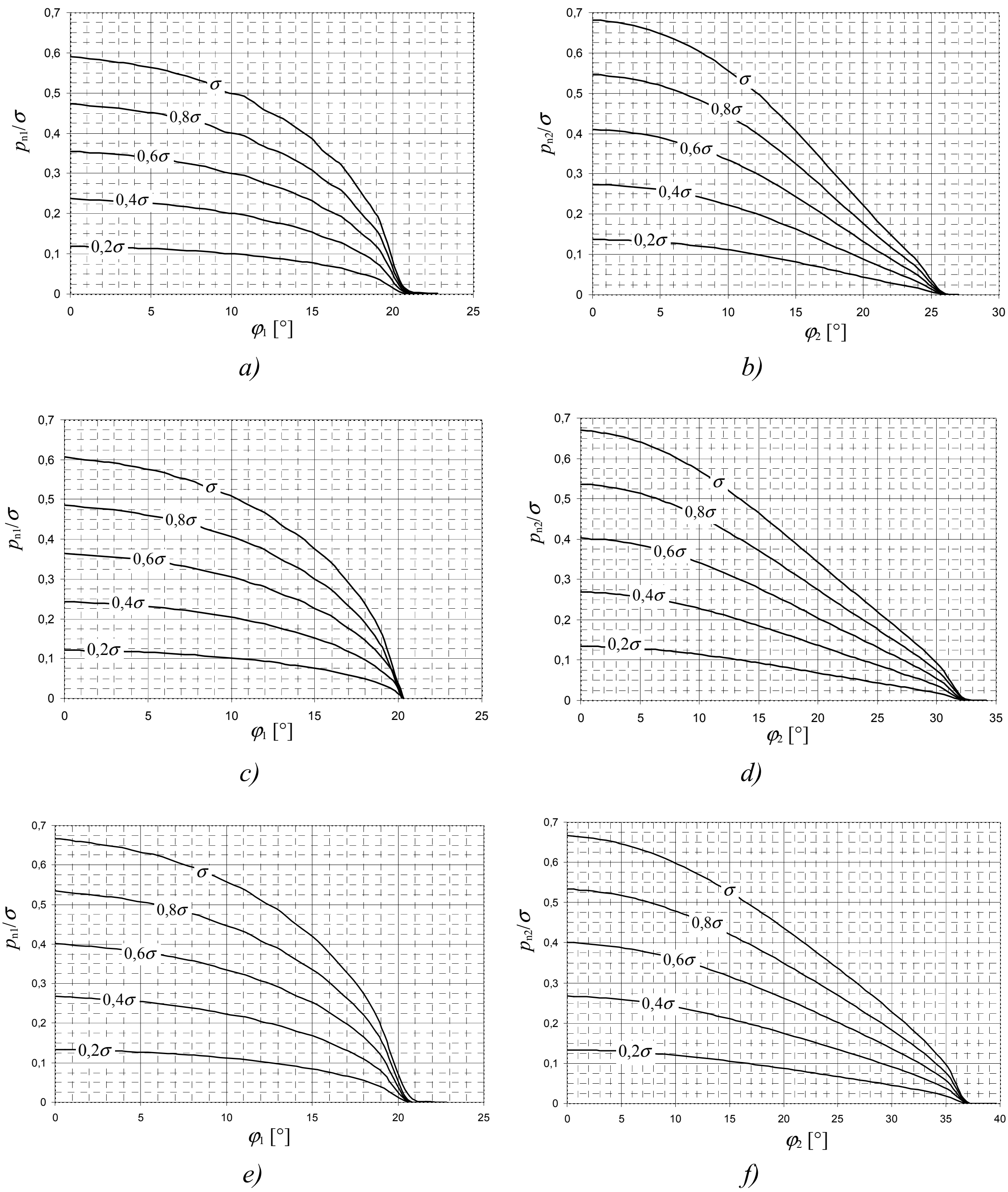
U slučaju kada se volumenske sile mogu zanemariti, izraz (B.4) reducira se na oblik koji uključuje samo površinske sile

$$\int_{\Gamma} u_i \tilde{t}_i \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma} \tilde{u}_i t_j \mathrm{d}\Gamma \,, \tag{B.5}$$

što je formulacija koju se u literaturi najčešće susreće.

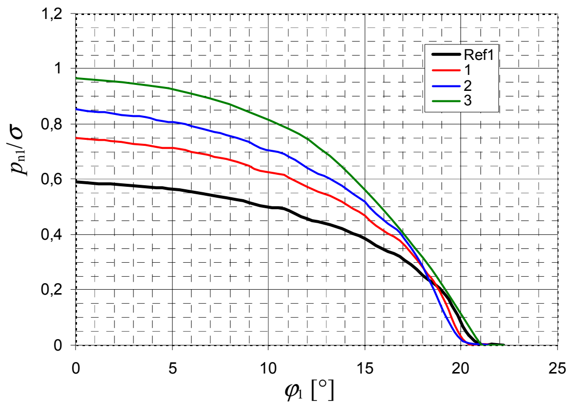
Prilog C. Rezultati analize svornjaka, čahure i ploče

Prilog C.1. Kontaktni pritisci za različite intenzitete opterećenja

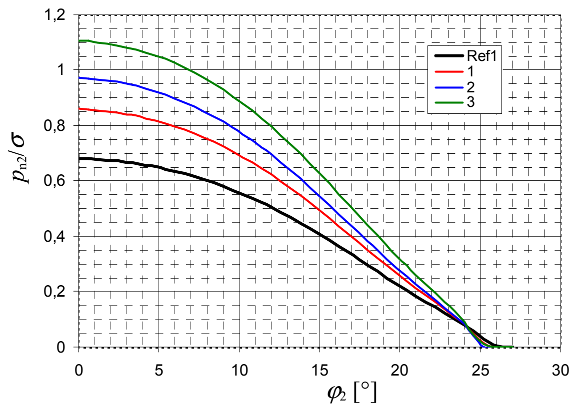


Sl. C1. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za različite intenzitete opterećenja analogno slici 28 za geometrije D/R = 0,2 (a i b), D/R = 0,5 (c i d) i D/R = 1 (e i f)

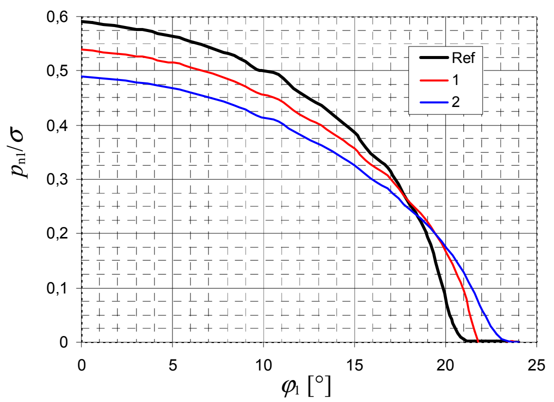
Prilog C.2. Kontaktni pritisci za različita svojstva materijala



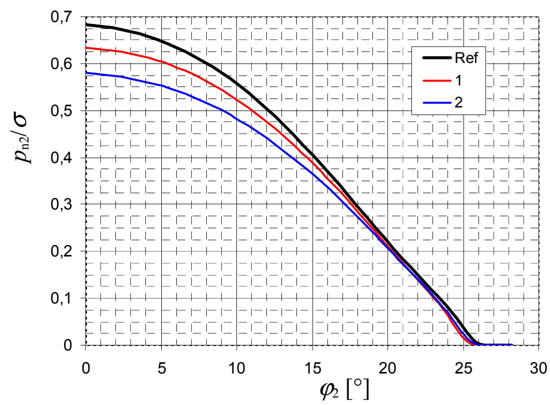
a)



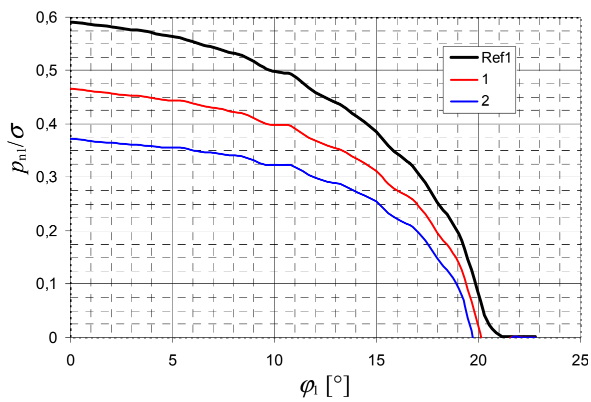
b)



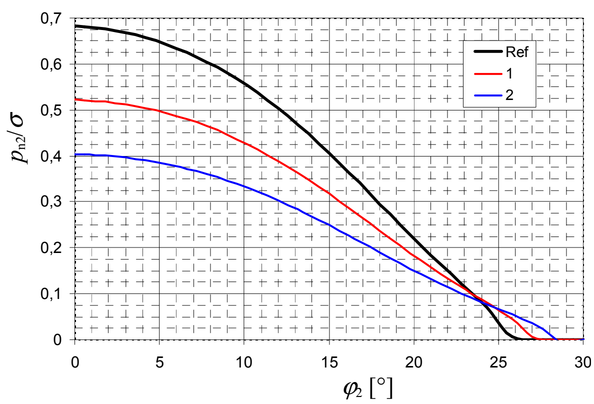
c)



d)

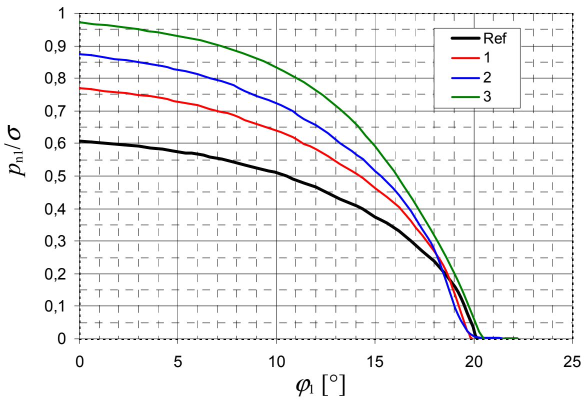


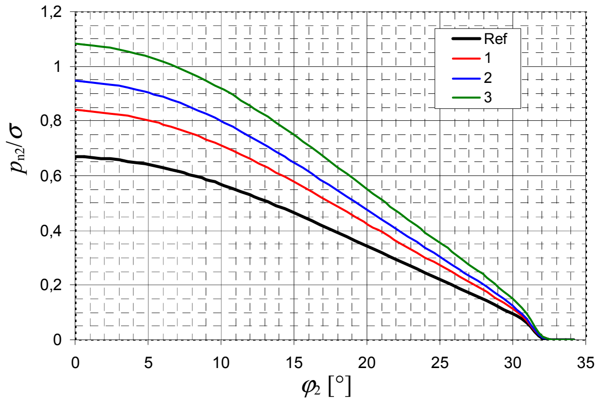
e)



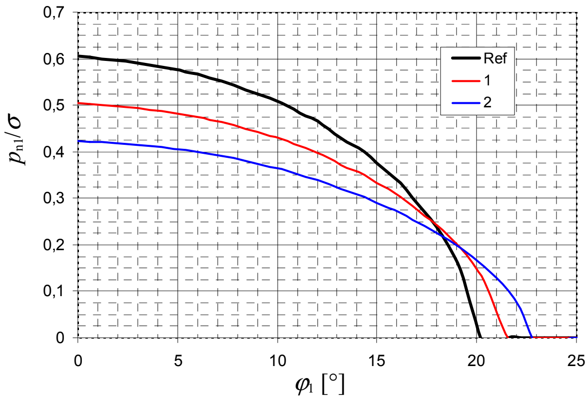
f)

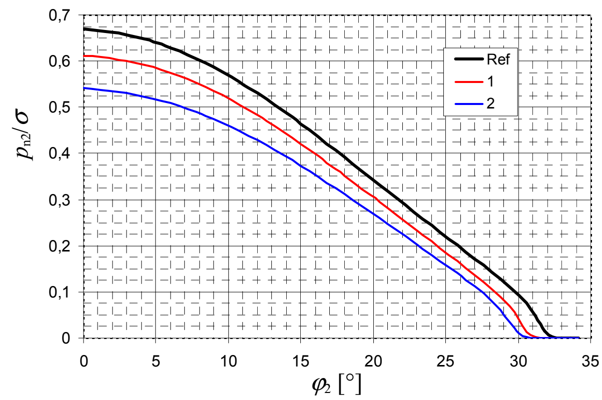
Sl. C2. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju D/R = 0,2 analogno slikama 32-34 za različita svojstva materijala ploče (a i b), čahure (c i d) i svornjaka (e i f)



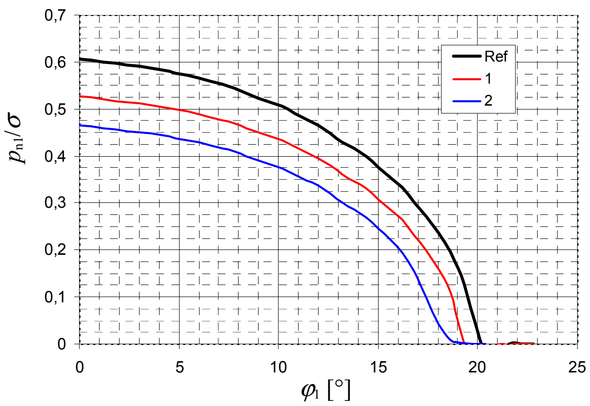


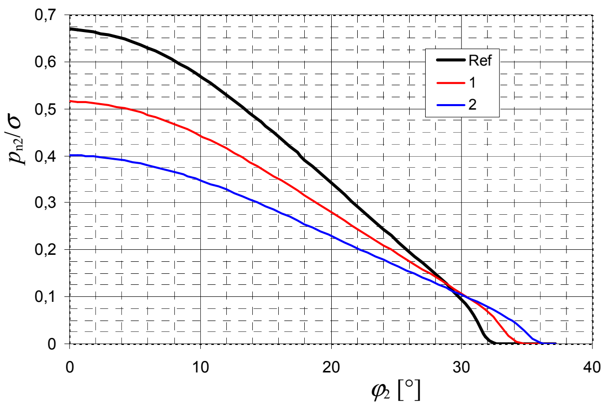
a) *b)*





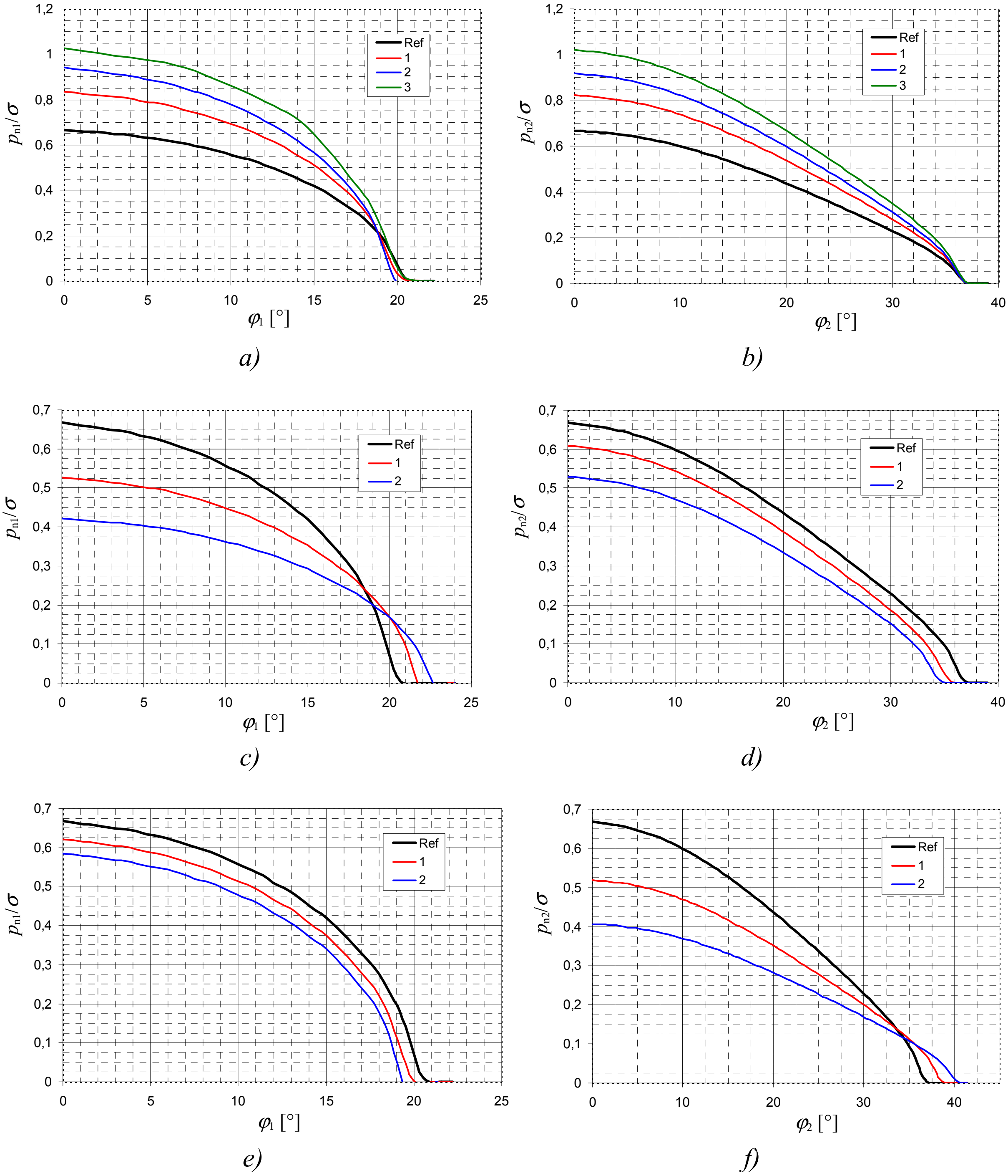
c) *d)*





e) *f)*

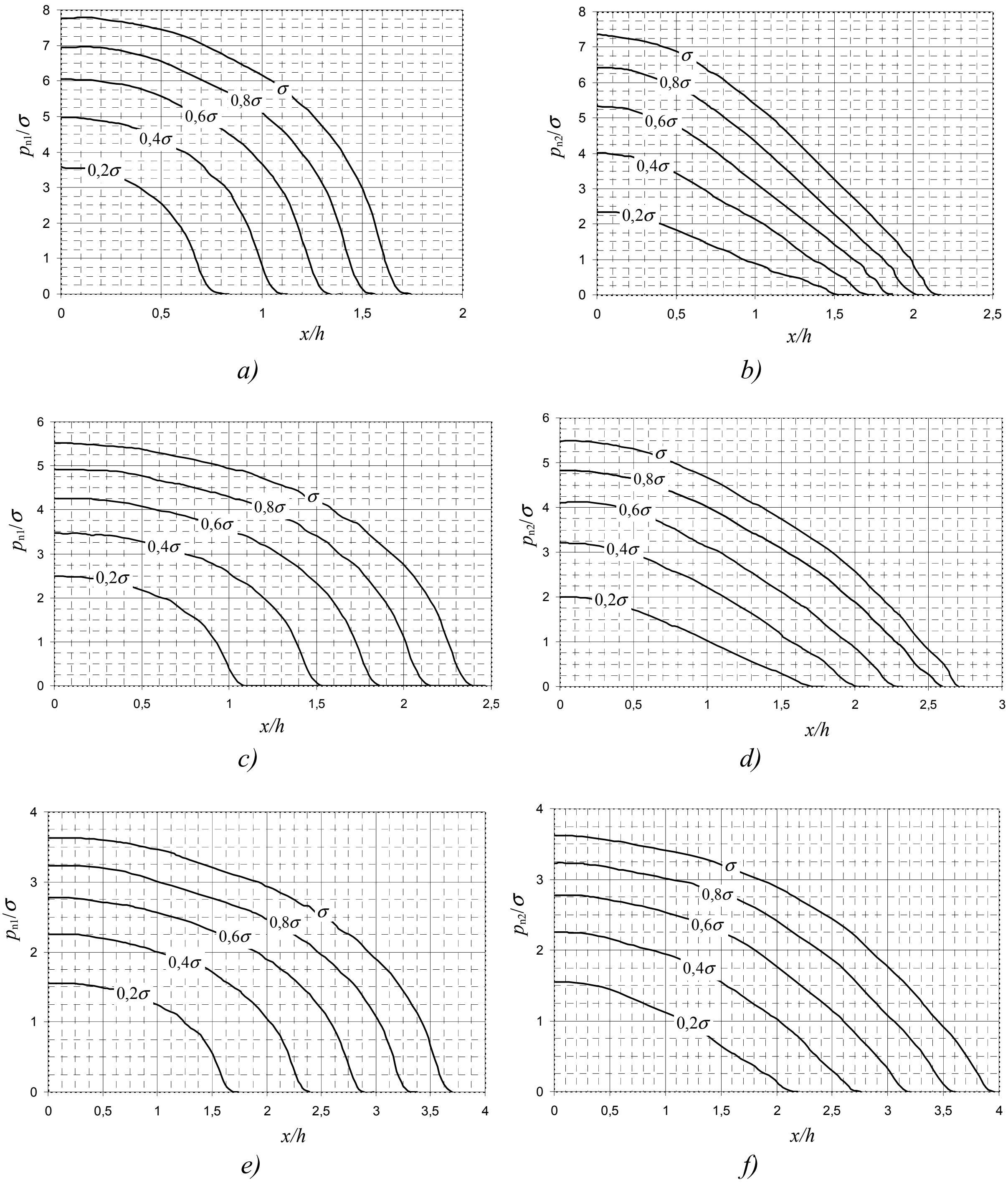
Sl. C3. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju D/R = 0,5 analogno slikama 32-34 za različita svojstva materijala ploče (a i b), čahure (c i d) i svornjaka (e i f)



Sl. C4. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju D/R = 1 analogno slikama 32-34 za različita svojstva materijala ploče (a i b), čahure (c i d) i svornjaka (e i f)

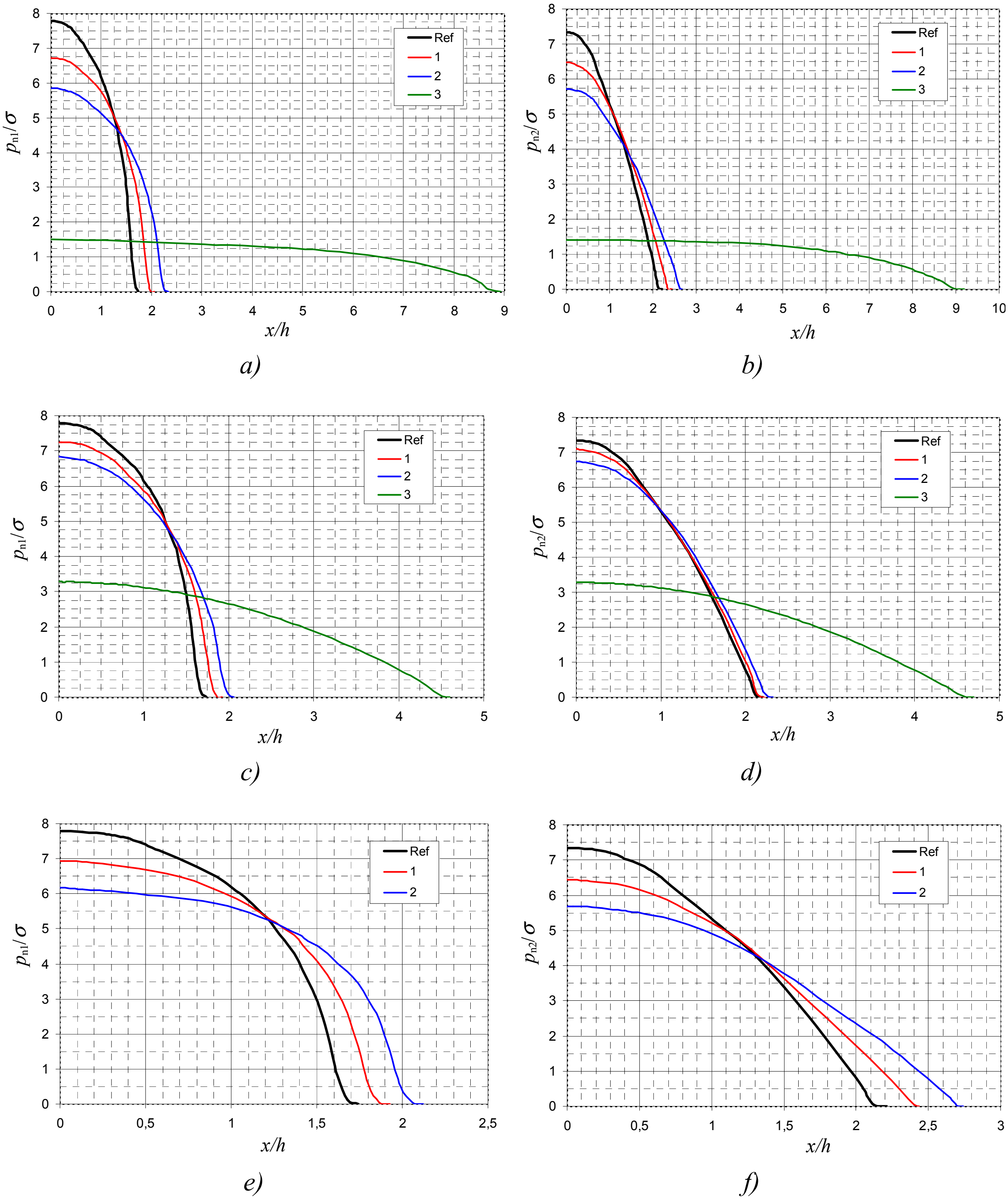
Prilog D. Rezultati analize utiskivača, sloja i podloge

Prilog D.1. Kontaktni pritisci za različite intenzitete opterećenja

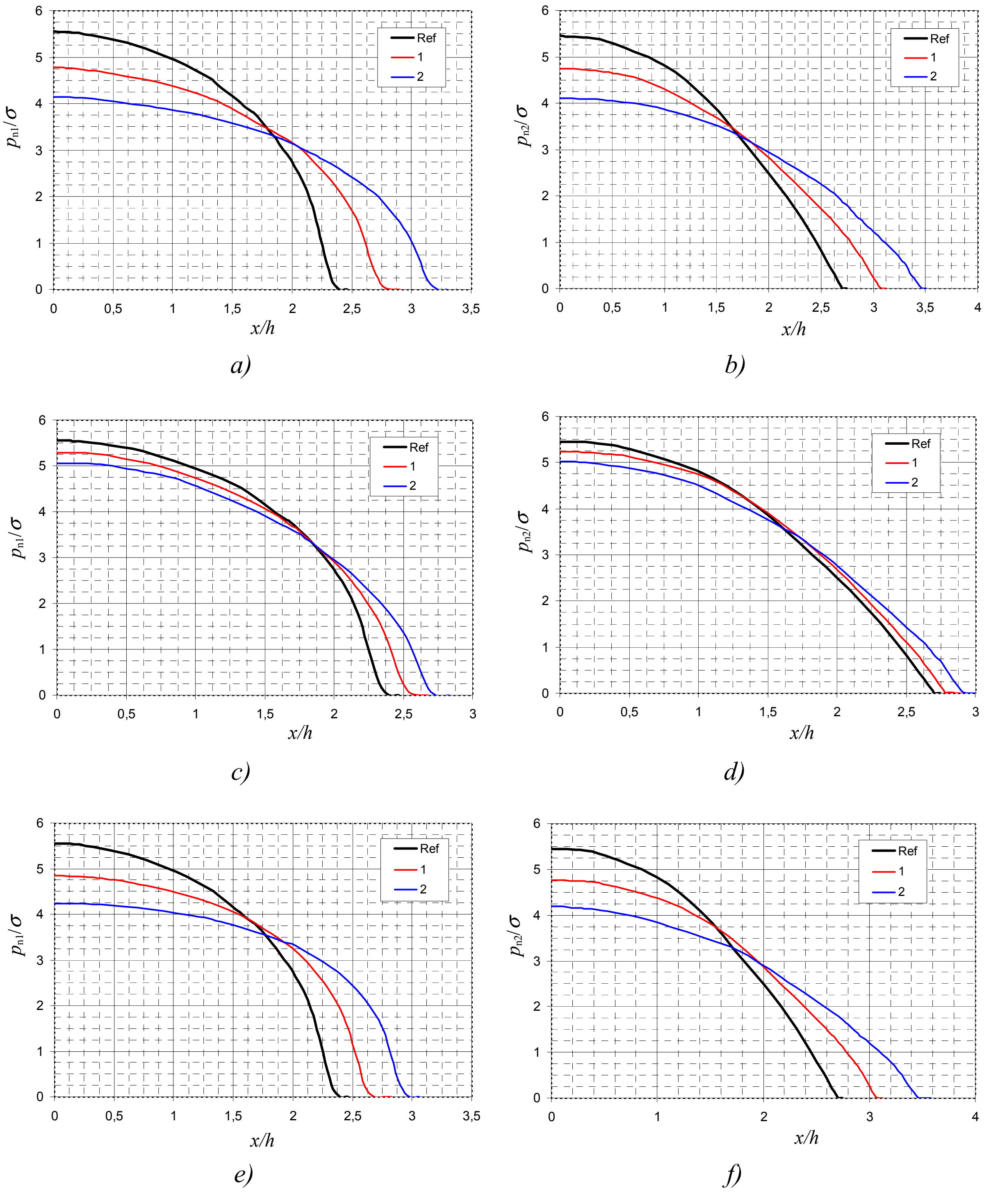


Sl. D1. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za različite intenzitete opterećenja analogno slici 44 za geometrije R/h = 100 (a i b), R/h = 200 (c i d) i R/h = 500 (e i f)

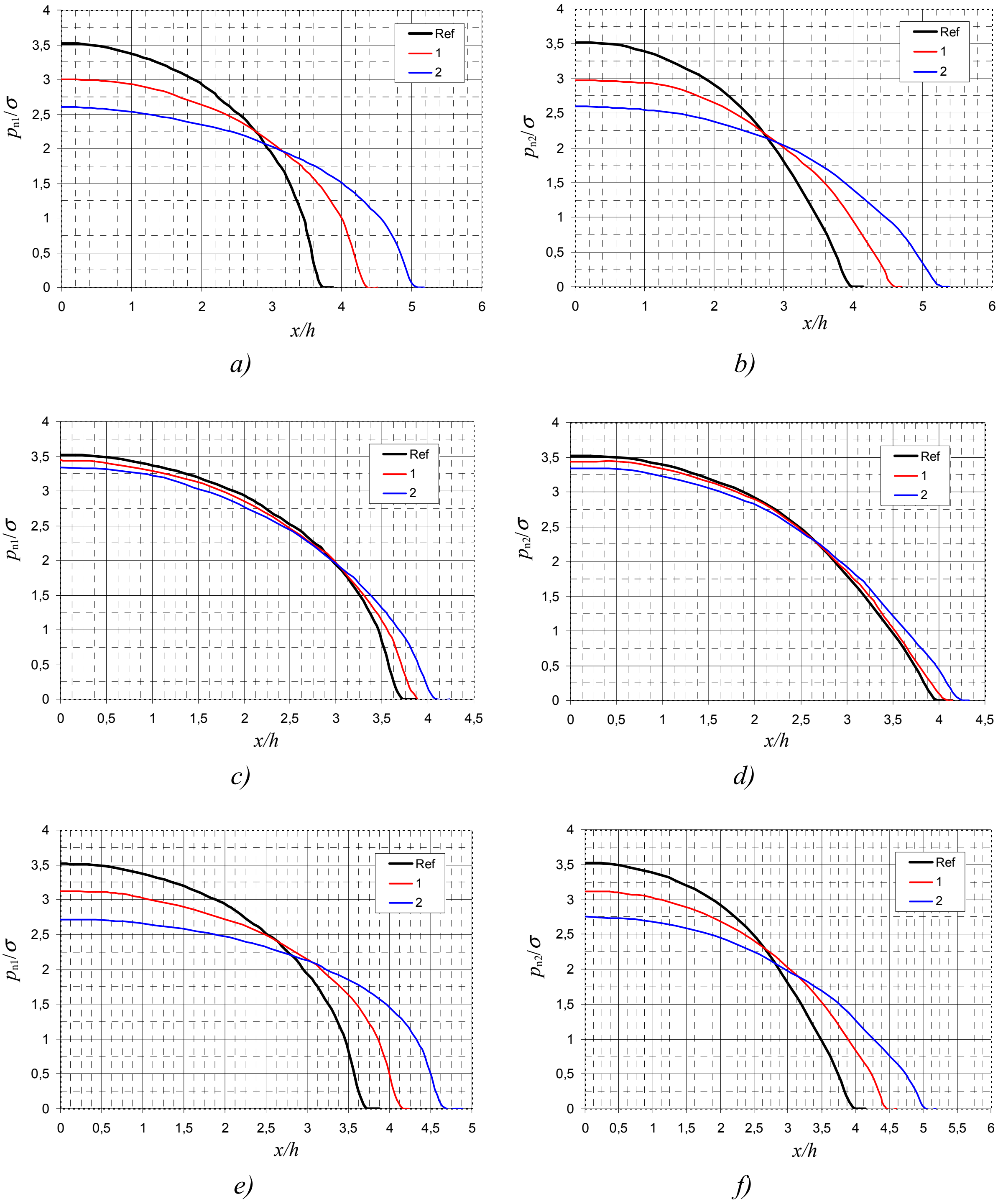
Prilog D.2. Kontaktni pritisci za različita svojstva materijala



Sl. D2. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju R/h = 100 analogno slikama 47-49 za različita svojstva materijala utiskivača (a i b), sloja (c i d) i podloge (e i f)



Sl. D3. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju R/h = 200 analogno slikama 47-49 za različita svojstva materijala utiskivača (a i b), sloja (c i d) i podloge (e i f)



Sl. D4. Raspodjele normaliziranih kontaktnih pritisaka za geometriju R/h = 500 analogno slikama 47-49 za različita svojstva materijala utiskivača (a i b), sloja (c i d) i podloge (e i f)

Životopis

Branimir Rončević rođen je 27. listopada 1981. u Rijeci. Osnovnu je školu pohađao u OŠ Vladimir Gortan, koju je završio 1996. god., a srednjoškolsko je obrazovanje stekao u Prvoj hrvatskoj sušačkoj gimnaziji pohađajući opću gimnaziju, koju je završio 2000. godine.

Sveučilišni studij strojarstva upisuje 2000. godine na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. Tijekom četvrte i pete godine studija bio je stipendist MZOŠ-a na temelju postignutog prosjeka ocjena. Diplomirao je u prosincu 2005. godine izradom diplomskog rada pod naslovom "*Elasto-plastična analiza nosivosti grednih nosača metodom konačnih elemenata*" pod mentorstvom red. prof. dr. sc. G. Turkalja.

Nakon završetka studija, 01. siječnja 2006. zapošljava se na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci kao znanstveni novak na Zavodu za konstruiranje u strojarstvu, te je od tada sudjelovao u izvođenju vježbi iz kolegija *Numeričke metode u konstruiranju* i *Konstrukcijski elementi robota* na sveučilišnom diplomskom studiju strojarstva, *Konstrukcijski elementi I* i *Konstrukcijski elementi II* na sveučilišnom preddiplomskom studiju strojarstva, *Inženjerska grafika i dokumentiranje* te *Oblikovanje pomoću računala* na sveučilišnom preddiplomskom studiju strojarstva i brodogradnje, *Osnove konstrukcijskih elemenata* na sveučilišnom preddiplomskom studiju brodogradnje te *Elementi strojeva I* i *Elementi strojeva II* na stručnom studiju strojarstva.

U veljači 2006. upisuje poslijediplomski znanstveni studij smjera Konstruiranje u strojarstvu pod mentorstvom red. prof. dr. sc. S. Zelenike, a studij dovršava pod mentorstvom red. prof. dr. sc. B. Obsiegera. U zvanju znanstvenog novaka radio je zaključno do prosinca 2007. godine, a u siječnju 2008. godine izabran je u suradničko zvanje asistent s punim radnim vremenom na određeno vrijeme kao zamjena za odsutnog djelatnika Zavoda za konstruiranje u strojarstvu. U studenom 2008. godine izabran je u suradničko radno vrijeme asistent s punim radnim vremenom na određeno vrijeme, na kojem mjestu radi i danas.

U okviru svojeg stručnog usavršavanja u svibnju 2006. godine pohađao je tutorial "*Flexure based mechanisms for high precision*" u sklopu konferencije Europenan Society for Precision Engineering and Nanotechnology (EUSPEN) u Badenu u Austriji. U rujnu 2006. godine je tijekom kraćeg boravka pri Scuola universitaria professionale della Svizzera Italiana (SUPSI), Lugano-Manno u Švicarskoj, stjecao osnovna znanja o dinamičkoj identifikaciji sustava, a u razdoblju od lipnja do rujna 2007. godine je tijekom studijskog boravka pri Sveučilištu u Udinama na Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Gestionale e Meccanica (DIEGM) radio na zadatku kompenzacije mikromehaničkih nelinearnosti kod sustava za pozicioniranje visokih preciznosti.

Kao suradnik bio je tijekom 2006. godine uključen na znanstvenom projektu MZOŠ-a 0069028 *Teorijska i eksperimentalna analiza elastičnih zglobova ultra-visoke preciznosti* voditelja red. prof. dr. sc. S. Zelenike te zatim tijekom 2007. godine na projektu br. 069-0692195-1792 *Podatljivi uređaji ultra-visoke preciznosti za uporabu u mikro i nanotehnologiji* (dio znanstvenog programa br. 0692195 „*Optimizacija svojstava strojarskih konstrukcija za inovativne primjene*”), također pod vodstvom red. prof. dr. sc. S. Zelenike. Od 2008. god. je kao suradnik uključen na projektu br. 069-0692195-1793 *Konstrukcija i optimizacija prijenosnika snage* voditelja red. prof. dr. sc. B. Obsiegera.

Kao član organizacijskog odbora aktivno je sudjelovao u višemjesečnoj pripremi i organizaciji međunarodnog znanstvenog okupljanja u sklopu Prve hrvatske ljetne škole sinkrotronskog zračenja SynCro'07, održane u Rijeci u rujnu 2007. godine.

Autor je ili koautor devet znanstvenih i stručnih radova objavljenih u domaćim ili stranim časopisima i zbornicima radova, a kao usmeni izlagač sudjelovao je na međunarodnom znanstvenom skupu MECHATRONICS 2007 u Varšavi u Poljskoj tijekom rujna 2007. godine te CADAM 2011 tijekom rujna 2011. godine.

Aktivno se služi engleskim jezikom, a pasivno talijanskim jezikom.

PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

1. AUTOR

Ime i prezime:	Branimir Rončević
Datum i mjesto rođenja:	27.10.1981., Rijeka
Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Sveučilišni studij strojarstva, 2005.
Naziv fakulteta, smjera i godina završetka poslijediplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Konstruiranje u strojarstvu, 2012.
Sadašnje zaposlenje:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov:	Analiza kontaktnog problema sa smanjenjem kontaktne površine
Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka:	VII + 150 stranica, 76 slika, 7 tablica, 86 bibliografskih podataka
Znanstveno polje i grana:	Strojarstvo, opće strojarstvo (konstrukcije)
Voditelj rada:	Red. prof. dr. sc. Dubravka Siminiati
Fakultet na kojem je rad odobren:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

3. OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme:	10.07.2009.
Datum predaje rada:	20.03.2012.
Datum prihvaćanja ocjene rada:	29.06.2012.
Sastav povjerenstva za ocjenu:	Red. prof. dr. sc. Boris Obsieger – predsjednik Red. prof. dr. sc. Dubravka Siminiati Red. prof. dr. sc. Iztok Potrč
Datum obrane:	17.07.2012.
Sastav povjerenstva za obranu:	Red. prof. dr. sc. Boris Obsieger – predsjednik Red. prof. dr. sc. Dubravka Siminiati Red. prof. dr. sc. Iztok Potrč
Datum promocije:	

Oznaka: D.D. Tek. broj: UDK:

ANALIZA KONTAKTNOG PROBLEMA SA SMANJENJEM KONTAKTNE POVRŠINE

Branimir Rončević

Sveučilište u Rijeci
Tehnički fakultet
Hrvatska

Ključne riječi: kontaktni problem, smanjenje kontaktne površine, metoda konačnih elemenata, fotogrametrijsko mjerenje

Sažetak: U ovom je radu uz opis najvažnijih matematičkih formulacija i numeričkih pristupa u analizi kontaktnih problema, provedena analiza kontakta sa smanjenjem kontaktne površine. Analiza je provedena za slučaj svornjaka, čahure i ploče uz pretpostavku nulte zračnosti te za slučaj utiskivača, sloja i podloge kada između sloja i podloge ne postoji čvrsta veza. Problem je primjenom metode konačnih elemenata istražen unutar linearne teorije elastičnosti za slučaj ravninskog stanja deformacije. Ispitani su utjecaj intenziteta vanjskog opterećenja te utjecaj geometrije, svojstava materijala i trenja. Dobivene krivulje raspodjela kontaktnih pritisaka za problem svornjak-čahura-ploča pokazuju da se na kontaktnim površinama s većim zahvatnim kutom mogu javiti i veći vršni pritisci. Ovakva se vrsta problema pokazuje kao linearno zavisna o intenzitetu vanjskog opterećenja, uz zanemariv utjecaj opterećenja na promjene kontaktnih kutova. Za problem utiskivača, sloja i podloge pokazano je da postoji nelinearna zavisnost kontaktnih pritisaka i dimenzija kontaktnih površina o vanjskom opterećenju. U eksperimentalnom je dijelu istraživanja primjenom optičke metode fotogrametrije ispitano deformacijsko ponašanje sloja u problemu utiskivač-sloj-podloga. Primijenjena je metoda zasnovana na principu digitalne korelacije slike i upotrijebljen je mjerni sustav ARAMIS 4M. Rezultati mjerenja pokazuju zadovoljavajuće poklapanje s rezultatima numeričkih simulacija.

Rad nije objavljen.

Mentor:	Red. prof. dr. sc. Dubravka Siminiati
Povjerenstvo za ocjenu:	Red. prof. dr. sc. Boris Obsieger
	Red. prof. dr. sc. Dubravka Siminiati
	Red. prof. dr. sc. Iztok Potrč
Povjerenstvo za obranu:	Red. prof. dr. sc. Boris Obsieger
	Red. prof. dr. sc. Dubravka Siminiati
	Red. prof. dr. sc. Iztok Potrč

Datum obrane: 17.07.2012. Datum promocije: __.__.2012.

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.
(VII + 150 stranica, 76 slika, 7 tablica, 86 bibliografskih podataka, hrvatski jezik)

D.D.

UDK:

1. Analiza kontaktnog problema sa smanjenjem kontaktne površine

I Rončević, B.

II Sveučilište u Rijeci
Tehnički fakultet
Hrvatska

Ključne riječi:

kontaktni problem
smanjenje kontaktne površine
metoda konačnih elemenata
fotogrametrijsko mjerenje

Code: DD No.: UDC:

RECEDING CONTACT PROBLEM ANALYSIS

Branimir Rončević

University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Keywords: receding contact problem, finite element method, digital image correlation measurements

Summary: An overview of the most important formulations and numerical methods in the analysis of contact problems is presented, followed by an investigation of receding contact problems. The analyses were carried out for the problem of a perfect-fit pin and bushing in a hole in a plate and the problem of an indenter pressing an unbonded layer resting on a substrate. The problems were analyzed using the finite element method within the scope of linear theory of elasticity and under the assumption of plane strain conditions. The numerical analyses were carried out in the Femap software package, which uses the NX Nastran solver. Such contact problems were investigated for the influence of the intensity of external load, different geometries, different material properties and friction. The obtained contact pressure distributions for the pin-bushing-plate problem show that higher peak values of contact pressures occur on the contact surfaces with larger contact angles. This problem shows to be linearly dependent on the intensity of external load, with negligible effect on the contact angles. In the problem of an indenter, layer and substrate the contact pressures and half-widths were found to be non-linearly dependable on the applied external load. Experimental investigation was carried out by optical measurements of displacements so as to ascertain the deformation behaviour of a layer indented into a substrate. The used method employs the digital image correlation technique and the ARAMIS 4M system was used. The obtained measurement results show a satisfactory degree of agreement with the numerical results.

This thesis has not been published.

Mentor:	Full Prof. D.Sc. Dubravka Siminiati
Advisors:	Full Prof. D.Sc. Boris Obsieger
	Full Prof. D.Sc. Dubravka Siminiati
	Full Prof. D.Sc. Iztok Potrč
Reviewers:	Full Prof. D.Sc. Boris Obsieger
	Full Prof. D.Sc. Dubravka Siminiati
	Full Prof. D.Sc. Iztok Potrč

Presentation: 17.07.2012. Degree conferred: __.__.2012.

This thesis is deposited in the library of the University of Rijeka, Faculty of Engineering.
(VII + 150 pages, 76 pictures, 7 tables, 86 references, Croatian language)

DD

UDC:

1. Receding contact problem analysis

I Rončević, B.

II University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Keywords:

contact problem
receding contact surface
finite element method
digital image correlation