

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

**ANALIZA AKUSTIČKOG ODZIVA  
PRAVOKUTNOG PANELA**

Doktorska disertacija

Ante Skoblar

Rijeka, 2012.



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

**ANALIZA AKUSTIČKOG ODZIVA  
PRAVOKUTNOG PANELA**

Doktorska disertacija

Ante Skoblar

Mentor: Red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić

Rijeka, 2012.



(odлука Fakultetskog vijeća Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci o odobrenju teme)



## Sažetak

Stjenke prostorija raznih namjena u kojima ljudi svakodnevno borave često se izvode kao paneli sa periodičkim ukrepama jer je cilj dobiti dovoljnu nosivost pregrade uz minimalan rast njezine mase. Takve pregrade imaju specifičan akustički odziv zbog ponavljanja rubnih uvjeta pa se njihov odziv može modelirati pojednostavljenim metodama a što omogućuje smanjivanje vremena izračuna uz odgovarajuću točnost. U slučaju kad se radi o ravninskim prisilnim valovima akustičkog polja i kad je visina perioda panela najmanje tri puta veća od njegove širine, beskonačni periodički oslonjen panel u jednom smjeru može se modelirati kao beskonačna periodički oslonjena greda pa se ona i uzela za osnovni model. Akustički odziv izračunat je metodom virtualnog rada uz definiranje pomaka redom prostornih harmonijskih valova. S obzirom da se radi o beskonačnom modelu i da je cilj dobiti rezultate za konačni model površina udarnog vala i radijacija zvuka ograničena je na konačne dimenzije modela prema postojećim metodama iz relevantne literature.

U disertaciji je opisan teorijski izračun i dobiveni su numerički rezultati utjecaja prigušenja u osloncima na akustički odziv panela. Analiziranjem utjecaja brojnosti prostornih harmonijskih valova na točnost rezultata, kako zvučnog transmisijskog gubitka tako i propagacijske konstante kod slobodnih vibracija, definirani su dijagrami u kojima se vidi utjecaj prigušenja na sustav. U sustavu s dovoljnim prigušenjem maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojavljuje se na najvišoj frekvenciji izračuna kao što je i navedeno u relevantnoj literaturi međutim ukoliko sustav nije dovoljno prigušen maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojavit će se na nižoj frekvenciji. O prigušenju u sustavu ovisit će i granični broj prostornih harmonijskih valova do kojeg se amplitude prostornih harmonijskih valova kod slobodnih vibracija panela brže izračunavaju pomoću metode virtualnog rada nego s razvojem u Fourierov red. Prostorni harmonijski valovi se u relevantnoj literaturi prikazuju dijagramima u kojima su njihove amplitude i fazne brzine definirane za jednu frekvenciju dok je u ovoj disertaciji predložen dijagram u kojem su amplitude i fazne brzine valova definirane za zadani frekventni pojas što se postiglo definiranjem amplituda vala bojom. S navedenim pristupom moguće je pratiti promjene u vibracijskom odzivu panela pri promjeni raznih utjecajnih parametara iz čega slijede jasni zaključci o prirodi akustičkog odziva panela. Izvođenjem funkcije oblika slobodnih vibracija periodički oslonjene grede na jednostavne oslonce dobivena su rješenja čija je točnost verificirana primjenom metode virtualnog rada.

U skladu s rezultatima numeričkih simulacija i u okviru postojećih mogućnosti korištenih računala definirani su rubni uvjeti eksperimentalnog modela prema kojima su eksperimenti i izvršeni. Rezultati eksperimentalnog modela dobro se slažu sa rezultatima numeričke simulacije.

## **Summary**

Room walls in which people reside every day are often built as panels with periodical stiffeners because the aim is to have sufficient rigidity with minimum amplification of the wall mass. That kind of barriers have specific acoustic response because of periodic multiple repetition of boundary conditions so the acoustic response can be modelled with simplified methods which causes minimising of calculation time with optimal accuracy. In the case of plane acoustic waves and when the height of the panel period is minimally three times larger than its width, infinite periodically supported panel can be modelled as infinite periodically supported beam which is the case in this dissertation. Acoustical response is calculated with the method of virtual work with displacement defined with series of spatial harmonical waves. Concerning that the model is infinite and that the goal is to calculate finite model the acoustic and structural coupling effects are limited to the area of finite model using methods from relevant literature.

In this dissertation theoretical description and numerical results of influence of damping in the supports on panel acoustic response is given. The influence of number of spatial harmonic waves on the accuracy of the result is analysed. When there is sufficient damping in the system the maximum number of spatial harmonics waves for gaining an appropriate accuracy are on the maximum frequency but if the damping is low the maximum number of spatial harmonic waves are needed on lower frequency. Spatial harmonic waves in current literature are presented in diagrams with amplitudes and phase velocities for one frequency. In this dissertation a diagram with amplitude, phase velocities for a frequency spectrum is used where amplitudes of waves are defined with color. With this approach the changes in the frequency domain can be easily seen. Also, free vibrations of infinite periodically supported beam on simple supports are calculated where a new shape function is derived and propagation constants are calculated with specified method.

In accordance with numerical simulation within the current computer possibilities experimental boundary conditions are chosen and the experiments were done. The results of experimental model are in a good agreement with the results of numerical simulation.





## Predgovor

Doktorska disertacija pod nazivom *Analiza akustičkog odziva pravokutnog panela* izrađena je u okviru znanstvenog projekta *Redukcija vibracija i buke strojeva mehatroničkim pristupom* (br. 069-0691736-1733) financiranog od strane Ministarstva znanosti Republike Hrvatske na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.

Ovaj rad se može smatrati uvodom u daljnja istraživanje akustičkog odziva pravokutnih panela u smjeru proširivanja dosadašnjih spoznaja na temu vibracija i radijacije zvuka oko ploče. Naglasak je dan na izradu numeričkog modela na temelju kojeg se može dobiti uvid u akustički odziv pravokutnih panela posebno sa periodičkim osloncima.

Veliku zahvalnost upućujem svojem mentoru red. prof. dr. sc. Robertu Žiguliću na stručnoj i znanstvenoj pomoći, sugestijama i usmjeravanju ovog istraživanja. Kolegama izv.prof.dr.sc. Sanjinu Brautu, izv.prof.dr.sc. Domagoju Lancu i izv.prof.dr.sc. Miroslavu Vrankiću te kolegici dr.sc. Goranki Štimac zahvaljujem se na pristupačnosti i korisnim savjetima vezanim uz nastanak ovog rada. Red. prof. dr. sc. Josipu Brniću posebno hvala na velikoj potpori.

Za pomoć u eksperimentalnom dijelu ove disertacije zahvaljujem Bernardu Badurini, Ivu Vičiću, Damiru Kustiću i Danijelu Roksandiću. Ujedno se zahvaljujem i poduzeću KnaufInsulation d.o.o. iz Novog Marofa koje je doniralo kamenu vunu Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.

Posebnu zahvalnost dugujem supruzi Gabrijeli i kćerkama Luciji i Veroniki, kao i roditeljima Stjepanu i Margariti na razumjevanju i podršci tijekom izrade ovog rada.



## SADRŽAJ

1. Uvod .....	1
1.1. Značaj i primjena akustičkih panela za redukciju buke.....	1
1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja.....	3
1.3. Ciljevi i struktura disertacije.....	8
2. Teorijske osnove matematičkog modela .....	11
2.1. Diferencijalna jednadžba gibanja grede po Euler-Bernoulli-evoj teoriji.....	12
2.2. Slobodne vibracije beskonačne periodički oslonjene grede .....	14
2.2.1. Direktno rješavanje diferencijalne jednadžbe gibanja.....	14
2.2.1.1. Jednostavnii oslonci.....	15
2.2.1.1.1. Karakteristike propagacijskih konstanti .....	15
2.2.1.1.2. Funkcija oblika vibriranja.....	23
2.2.1.1.3. Izračun propagacijskih konstanti .....	27
2.2.1.2. Elastični oslonci.....	29
2.2.2. Rješavanje pomoću metode virtualnog rada i metode propagacije valova .....	31
2.2.2.1. Opis metode propagacije valova.....	31
2.2.2.2. Opis metode virtualnog rada .....	32
2.2.2.3. Izračun propagacijskih konstanti .....	33
2.2.2.4. Određivanje amplituda prostornih harmonijskih valova .....	37
2.2.2.4.1. Rješavanje matrične jednadžbe slobodnih vibracija.....	38
2.2.2.4.2. Razvoj funkcije oblika u Fourier-ove redove .....	38
2.2.2.5. Smjer, amplituda i fazna brzina prostornih harmonijskih valova.....	39
2.2.2.5.1. Vektorski opis gibanja valova u gredi na jednostavnim osloncima .....	39
2.2.2.5.2. Ukupni val kao grupa prostornih harmonijskih valova .....	41
2.2.2.5.3. Dijagram prikaza grupe prostornih harmonijskih valova .....	45
2.2.2.5.4. Analiza prostornog harmonijskog vala s najvećom amplitudom .....	48
2.2.2.5.5. Efekt koincidencije .....	49
2.3. Akustički odziv beskonačnog nedeformabilnog panela na normalne ravninske valove.....	51
2.4. Akustički odziv beskonačne periodički oslonjene grede.....	55
2.4.1. Definiranje propagacijskih konstanti.....	55
2.4.2. Rješavanje pomoću metode virtualnog rada i metode propagacije valova .....	57
2.4.2.1. Rješavanje matrične jednadžbe prisilnih vibracija .....	62
2.4.2.2. Konvergencija rezultata .....	63
2.4.2.3. Koeficijent transmisije zvučne snage .....	64
2.5. Akustički odziv konačnog periodički oslonjenog panela .....	65

2.5.1. Metoda prostornog isječka .....	65
2.5.2. Efikasnost radijacije .....	66
3. Numerička analiza.....	69
3.1. Opis rješavača .....	69
3.1.1. Izračun akustičkog odziva (prisilnog gibanja) .....	70
3.1.2. Izračun slobodnog gibanja .....	71
3.2. Postprocesor - interpretacija rezultata izračuna .....	72
3.3. Numerički rezultati .....	74
3.3.1. Verifikacija konvergencije rezultata .....	74
3.3.2. Analiza utjecajnih parametara na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela	75
3.3.3. Brzina izračuna pomoću metode virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova za izračun slobodnih vibracija.....	83
3.3.4. Izračun vlastitih frekvencija slobodnih vibracija periodički oslonjene grede.....	85
3.3.5. Usporedba oblika vibriranja slobodnih vibracija .....	87
3.3.6. Dijagram za analizu slobodnih i prisilnih vibracija .....	88
3.3.7. Usporedba izračunatih vrijednosti zvučnih transmisijskih gubitaka konačnog panela s metodom virtualnog rada i metodom konačnih elemenata .....	90
4. Eksperimentalna analiza .....	93
4.1. Opis eksperimentalnog modela.....	93
4.1.1. Ječna komora.....	95
4.1.2. Gluha komora.....	95
4.1.3. Zid između ječne i gluhe komore.....	96
4.1.4. Okvir panela.....	97
4.2. Mjerna oprema .....	98
4.3. Rezultati mjerjenja referentnih fizikalnih veličina.....	99
4.3.1. Panel .....	99
4.3.2. Brtva .....	103
4.3.3. Određivanje faktora korekcije .....	107
4.3.4. Analiza rezultata zvučnog transmisijskog gubitka.....	108
Zaključak.....	111
Popis literature .....	115
Popis oznaka i simbola.....	121
Popis slika .....	127
Popis tablica .....	131
Životopis .....	133

## **Poglavlje 1.**

### **1. Uvod**

#### **1.1. Značaj i primjena akustičkih panela za redukciju buke**

Čovjek je stalno izložen utjecaju velikog broja neželjenih izvora zvuka, tj. buci, što je danas jedan od najčešćih problema kako u industrijskom okolišu tako i u svakodnevnom životnom okruženju. Buka štetno djeluje na zdravlje čovjeka kako fizički, akustičkim tlakom koji može dovesti do oštećenja sluha, tako i psihički, jer ometa misli i komunikaciju, i time umara i smanjuje radnu efikasnost. Zato je kontrola buke i potreba i izazov.

Širenje buke može se kontrolirati ugradnjom panelne konstrukcije između izvora zvuka i slušača. Panelna konstrukcija može biti izvedena u obliku oklopa oko izvora zvuka (npr. stroja), oklopa oko slušača ili pregrade između navedenih. Akustički odziv panelne konstrukcije ključni je element u izračunu smanjenja buke za sva tri navedena rješenja.

Temelj akustičkog odziva je interakcija zrak-panel koja započinje u trenutku udara vala nošenog zrakom o panelnu konstrukciju i rezultira vibriranjem panela. Za vrijeme odvijanja novonastalih raznih vrsta valova kinetička energija gibanja pretvara se u potencijalnu energiju strukture panela i obratno. I dok kinetička energija slijedi iz gibanja strukture panela, potencijalna pak energija slijedi iz normalnih i tangencijalnih naprezanja unutar strukture panela a navedena naprezanja rezultiraju različitim vrstama valova koje postoje u tankostjenoj konstrukciji: uzdužni (longitudinalni), poprečni (transverzalni) i fleksijski valovi.

Fleksijski valovi imaju najveću ulogu pri transmisiji zvuka, te kasnije pri akustičkoj radijaciji, zbog svojih najvećih poprečnih amplituda gdje je vektor brzine površine panela usmjeren u smjeru širenja vala u zraku a što rezultira efektivnom izmjenom energije između panela i zraka. S druge strane u zraku postoje samo longitudinalni valovi koji slijede iz normalnih naprezanja pri promjeni tlaka.

Pri interakciji zrak-panel dio energije zvuka se reflektira od panela, dio ostaje u strukturi panela a dio prolazi kroz panel. Ujedno dolazi do vibriranja panela pa nastaje i energija akustičke radijacije s obje strane panela.

Ukoliko se želi minimizirati akustička radijacija s druge strane panela potrebno je minimizirati transmisiju kroz strukturu panela. Postoje dva glavna principa smanjivanja transmisije zvučne energije iz jednog volumena zraka u drugi. Prema prvom principu, zvučna se energija apsorbira pri prolasku kroz strukturu panela na način da se pretvori u toplinu, a prema drugom principu zvuk ne prolazi kroz panel već se odbija (reflektira) natrag u prostor.

U praksi se susreću tri vrste apsorbera zvučne energije koji rade po prvom principu: porozni, membranski i rezonatorski apsorber.

U poroznom se apsorberu zvučna energija apsorbira na način da pri interakciji zraka i apsorbera, zrak u porama počne titrati pa se trenjem čestica zraka o stijenke pora zvučna energija pretvara u toplinsku energiju te prelazi sa zraka na stijenu materijala. Važno je napomenuti da se zrak zagrijava pri porastu njegove gustoće i obratno.

U membranskom apsorberu zvučna se energija apsorbira u materijal membrane pri njezinom titranju jer materijal membrane ima veliko unutarnje prigušenje.

U rezonatorskom apsorberu (npr. Helmholtz-ov apsorber) zvučna se energija pretvara u toplinsku pri trenju titrajućih čestica zraka o stijenke pora u apsorpcijskom materijalu koji se nalazi unutar apsorbera. Frekvencija povećane, tzv. "rezonantne", apsorpcije definira se sustavom masa opruga gdje je masa zrak u provrtima perforirane vanjske stijenke apsorbera a oprua zrak unutar apsorbera.

Prema drugom principu smanjivanja transmisije zvučne energije zvuk se reflektira zbog velike promjene u akustičkoj impedanci na transmisijskoj putanji.

Ukoliko zrakom prenešeni zvuk ima valnu duljinu jednaku valnoj duljini slobodnih vibracija panela, struktura panela rezonira s višestruko većom amplitudom što dovodi do većeg prijenosa zvuka na drugu stranu strukture panela. Najveća transmisija događa se na najnižoj vlastitoj frekvenciji strukture panela, što se pokušava izbjegći optimizacijom inercije, krutosti i prigušenja strukture panela. Kritična koincidentna frekvencija je najniža vlastita frekvencija slobodnog vala u strukturi panela čija se valna duljina poklapa s valnom duljinom vala prenešenog na okolni zrak. Na navedenoj frekvenciji povećana je akustička radijacija i s druge strane panelne strukture.

Dizajn i konstruiranje efektivnih panelnih struktura za prigušenje buke važan je element praktične kontrole buke za inženjere i arhitekte, te je znanje fizikalnih principa i iskustvo u dizajniranju od opće važnosti jer rezultira zdravijim okolišem, ugodnijim življjenjem i boljim radnim uvjetima što je bio razlog za odabir ove teme disertacije.

## 1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja

Mnoge inženjerske konstrukcije, kao npr. stijenke aviona ili brodova, sastoje se od tankih ploča ortogonalno ukrepljenih s raznim ukrepama. Sa druge strane ukrepa često se ugrađuje još jedan panel (npr. pregrade u avionima). Zbog njihove praktične važnosti, takve strukture analizirane su u velikom broju članaka.

Najčešći pristupi analiziranju dinamičkog odziva periodične strukture su metode:

- normalnih oblika vibriranja (eng. *normal modes*) [1] , [2] , [3] i [4],
- ortotropni model [5] i [6],
- propagacije valova (eng. *space-harmonics method*) [7] , [8] i [9] ,
- metoda prijenosnih matrica (eng. *transfer matrix method*) [10] i [11],
- konačnih spektralnih elemenata (eng. *spectral finite elements*) [12],
- statistička analiza energije [13] , [14] i [15],
- Rayleigh-Ritz [16] i [17],
- metoda konačnih elemenata [18] , [19] , [20] , [21] i
- metoda rubnih elemenata [22].

Najraniji radovi vezani za analizu odziva ukrepljenog panela pobuđenog sa slučajnim poljem akustičkog tlaka koristili su metodu normalnih oblika vibriranja. Odziv svakog normalnog oblika vibriranja dobivao se odvojeno nakon čega bi ukupni odziv bio određen pomoću statističkog zbrajanja. Najkomplikiraniji problemi koji su se uspjeli izračunati s ovom metodom imali su jednostavne rubne uvjete. Npr. Lin [1] u svojem radu zadaje ploču s jednostavno oslonjena dva suprotna kraja s okomitim ukrepama oblika slova *U* (eng. *stringer*) u cilju spriječavanja zakreta i poprečnog pomaka ploče. Prije izračuna ukupnog akustičkog odziva s ovom metodom moraju se odrediti normalni vlastiti oblici vibriranja. U radovima Lin [1-3] i Mercer [4] ukazano je na probleme u izračunu koji je pojednostavljen s prepostavkom niskog prigušenja i/ili niske gustoće normalnih oblika vibriranja a da bi se minimizirale poteškoće uzrokovane preklapanjem normalnih oblika vibriranja. Za uključivanje efekata prigušenja pri zvučnoj radijaciji bili su potrebni dugotrajni kompjuterski izračuni.

Za razliku od vibro-akustičkog odziva jednostavnih kontinuiranih struktura kao što su grede i ploče Leissa [5] i Soedel [6] detaljna analiza gibanja valova kod ukrepljenih panela je često teško ostvariva zbog kompleksnosti panelne konstrukcije i nesigurnosti kod određivanja rubnih uvjeta. Vibracije periodički oslonjenih panelnih konstrukcija često se analiziraju koristeći ekvivalentni ortotropni panel Leissa [5] i Sundara [76]. Heckl [7] je dokazao da se periodično ukrepljeni panel može tretirati kao ortotropni panel kad je udaljenost između susjednih ukrepa manja od četvrte najkraće valne duljine u panelu iz čega je vidljivo da se isti može koristiti na nižim frekvencijama.

Heckl [24] je dokazao i da fleksijski valovi mogu propagirati slobodno (bez smanjenja amplitude) samo u određenim frekvencijskim pojasevima koja je nazvao propagacijskim frekvencijskim pojasevima.

Metoda propagacije valova za jako prigušen panel korištena je u radu Mead i Wilby [25] i Mead i Pujara [26]. U navedenim radovima određen je relativno jednostavan izraz za pomak, zakriviljenost i naprezanje u bilo kojoj točki 1D strukture (grede). Velika prednost ove metode je da ona uključuje efekte zvučne radijacije. U navedenoj metodi poprečni su pomaci definirani u obliku reda sinusnih putujućih valova tzv. prostornih harmonijskih valova (eng. *space-harmonics*). U njihovim radovima, panel se modelira kao greda oslonjena na jednakim udaljenostima na elastične oslonce koji mogu primiti poprečne pomake i zakrete. Odziv grede na homogeno slučajno polje akustičkog tlaka je rješen ali u radu nije unešena interakcija između zraka (akustičkog sustava) i panela (struktturnog sustava). Odzivi 2D strukture (ploča) s poprečnim i uzdužnim osloncima istraživali su Lin [2-3], Mercer [4], Ford [27] i Mercer i Seavey [28].

Maidanik [29] je procijenio odziv ukrepljenog panela pobuđenog s difuznim poljem. On je dokazao da ukrepe povećavaju akustičku radijacijsku otpornost (eng. *radiation resistance*) panela i time povećavaju izmjenu energije između panela i zvučnog polja. Na ovaj rad se nadovezuje Fahy [30] naglašavajući da refleksije od ukrepa mijenjaju disperziju na način da slobodni valovi koji imaju komponente vektora valnog broja nadzvučne fazne brzine mogu propagirati na frekvencijama nižim od kritične frekvencije panela. Ove komponente povećavaju efikasnost podkritične radijacije i mogu uzrokovati da se panel pobudi koincidentno s pobuđujućim zvučnim valovima na frekvencijama nižim od koincidentne, pa se smanjuju zvučni transmisijski gubici za panel.

Mathur [31] je predložio teorijski model baziran na metodi propagacije valova za izračun zvučnih transmisijskih gubitaka za periodičko oslonjen panel i ukrućene dvostrukе panelne strukture ali nije objavio numeričke rezultate. Interakcija između vibrirajućeg panela i akustičkih tlakova oko panela analizirana je Lee [32] metodom propagacije valova za periodično oslonjenu beskonačnu gredu te je potvrđena konvergencija rješenja. Oni su

modelirali ukrepe upotrebljavajući kombinaciju točkastih masa i poprečne i fleksijske opruge da bi procijenili zvučne transmisije gubitke pomoću metode propagacije valova razvijene od strane Meada i Pujare [26] i Meada [33,34]. Ovaj model ne uzima u obzir geometriju ukrepa. Također, njihovi numerički podaci nisu bili potvrđeni eksperimentalno. Desmet [36] opisao je metodu određivanja karakteristike transmisije zvuka konačnih dvostrukih panelnih pregrada na niskim frekvencijama upotrebljavajući eksperimentalni pristup kao i teorijski pristup baziran na Dowell-ovojoj teoriji interakcije normalnih oblika vibriranja. Bedair [37] i Mukherjee i Parthan [38] analizirali su dinamičko ponašanje panela ukrućenih sa sustavom međusobno povezanih greda ili ukrepa na prvoj vlastitoj frekvenciji. Mauryš i Matte [39] dodali su ukrepe na ploču kao silu, ali nisu uzeli u obzir momente. Lin i Pan [40] i Lin [41] modelirali su ukrepe jednostavno oslonjenog panela kao sile i momente i analizirali su karakteristike prisilnih vibracija jednosmerno ukrućenih ravnih panela u niskom frekvencijskom pojasu. Liu i drugi [42] koristili su metodu prijenosne funkcije i tehniku ekspanzije normalnih oblika vibriranja za procjenu izolacije od zvuka koji se širi zrakom za korugirane panele s ukrepama oblika slova *U* (eng. *stringer*) i okvirom. Analiziran je i odziv ukrepljenog panela na akustično difuzno polje.

Manji broj autora (npr. Cooper [43], Legault i Mejdi [44]) proučavao je odziv panela s nekontinuiranim krutostima oslonaca periodički oslonjenog panela.

Za izračun akustičkog odziva ukrepljenih panela u kontekstu metode statističke analize energije (SEA), Bremner [13] je opisao gibanje ravnih dvosmjerne ukrepljenih panela pomoću valnih brojeva. U njegovom radu zadane su dimenzije panela  $a_D \times b_D$  i udaljenost između ukrepa  $L$  i  $L_y$ . U trenutku kad je polovica valne duljine normalnog oblika vibriranja u  $x$  i  $y$  smjeru manja od  $a_D$  i  $b_D$  dimenzije panela, panel se iz globalnog ponašanja ( $a_D$ ,  $b_D$ ) započne ponašati lokalno ( $a_D$ ,  $L_y$ ), ( $b_D$ ,  $L$ ). Kad polovica valne duljine normalnog oblika vibriranja postane manja od udaljenosti između ukrepa  $L$  i  $L_y$ , ponašanje normalnog oblika vibriranja je određeno s ponašanjem ravnog perioda panela ograničenog s ukrepama. Navedena četiri uvjeta predstavljaju četiri modela potrebna da bi se potpuno definirali vlastiti oblici vibriranja ukrepljenog panela u širokom frekvencijskom pojasu. U trenutku kad su ostvareni uvjeti za periodično nakupljanje normalnih oblika vibriranja, normalni oblici vibriranja će se pojavljivati u grupama određenim s faktorom brojnosti  $\mu_p$  (eng. *multiplicity factor*). Faktor brojnosti je broj normalnih oblika vibriranja koji nastaje na zadanoj frekvenciji. Cotoni [14] i drugi razvili su hibridnu metodu formulacije podsustava (SAE) koja se bazira na konačnim elementima, sintezi normalnih oblika vibriranja pojedine komponente i teorije periodičnosti s ciljem procjene gustoće normalnih oblika vibriranja i interakcijskog faktora gubitka ukrepljenih panela. Sličan analitički model napravio je Mejdi [15].

Wei [16-17] je analizirao primjenu Rayleigh-Ritz i proširenih Rayleigh-Ritz energetskih metoda na konačne periodične strukture sa sinusnim funkcijama pomaka te su analizirali i korelaciju između Rayleigh-Ritz metode za analiziranje konačnih periodičnih struktura i teoriju beskonačnih periodičnih struktura.

U slučaju kad se radi o beskonačnom periodički oslonjenom panelu, kako je već rečeno, pokazano je da se polje pomaka panela sastoji od reda prostornih harmonijskih valova Mead [33, 48], Mead i Pujara [26] i Mace [45-47]. Da bi se izračunao vibro-akustički odziv panela, ovi redovi se ograničavaju na konačan broj valova (tzv. grupu valova) koji je dovoljan da se osigura konvergencija. Opisani broj ovisi o prirodi konstrukcije panela i u općem slučaju je relativno malen na referentnim frekvencijama, manji od 50 na frekvencijama nižim od 10kHz, LeeKim [32], Wang [49], Xin [50-53]. Slijedi da je veličina sustava jednadžbi vezana uz ovaj model relativno mala. Navedeno vrijedi i za tanke panele (npr. za aluminijske avionske stijenke od cca. 1 mm). Za usporedbu, kod metode konačnih ili rubnih elemenata potrebna je intenzivna kompjuterska analiza za veći broj stupnjeva slobode kod srednjih i visokih frekvencija.

Međutim, iako niski zahtjevi za kompjutersku analizu čine metodu prostornih harmonijskih valova primamljivom ona ima ograničenja u primjeni.

Prvo, stvarne konstrukcije nisu nikad idealno periodične pa i kod visoko preciznih primjena (npr. proizvodnja aviona) uvjek postojati manji postotak netočnosti u procesu proizvodnje. Za smanjenje negativnog utjecaja netočnosti za prikaz akustičkih rezultata se koriste usrednjene skalarne veličine kao npr. efektivna vrijednost poprečne brzine panela (eng. *root mean square*) i radijacijska zvučna snaga usrednjena po površini polusfere oko izvora koje se usrednjavaju po frekvencijskom pojasu (npr. tercnom) kako bi se smanjili ekstremi u odzivu uzrokovani s karakterističnim frekvencijskim propusnim i nepropusnim pojasevima periodično oslonjenog panela. U radu Legault [54] odziv usrednjen po frekvencijama dobro se podudara s eksperimentalnim rezultatima, ali ne postoji nikakav formalni dokaz da opisani odziv, usrednjen po frekvencijama, odgovara približenju za statistički srednji odziv konstrukcije panela, koja malo odstupa od savršene periodičnosti (eng. *ergodic hypothesis*). Male perturbacije (eng. *perturbations*) isto prilično utječu na odziv periodične strukture zbog efekata lokalizacije po Hodges-u [55]. Stoga korištenje ovog pristupa nalaže iznimnu opreznost uz napomenu da je manja vjerojatnost pojavljivanja efekata lokalizacije u 2D nego u 1D konstrukciji.

Sljedeća velika negativnost metode propagacije valova je činjenica da stvarne strukture nisu beskonačne. Za stvarne strukture koje imaju veliki broj perioda, metoda se može primjeniti ali za panele koji imaju manji broj perioda panela i testirani su u laboratoriju, konačne dimenzije igraju važnu ulogu. Da bi se uzela u obzir konačna struktura, potrebno je u

izračun dodati i reflektirane valove rubova kao dodatak na efekte koji se pojavljuju kod beskonačnih struktura. Izračun reflektiranih valova zahtjeva precizno poznavanje elastičnih rubnih uvjeta koji postoje po rubu panela i koji se teško mogu odrediti u praksi, osobito kad je struktura ugrađena u ravninu za test mjerena zvučnog transmisijskog gubitka panela.

Uobičajeno pojednostavljenje koje se u radovima uzima u obzir je pretpostavka da je panel pravokutan i jednostavno oslonjen. Njegovi poprečni pomaci mogu se tada izračunati pomoću Fourierovog reda koji predstavlja oblike vibriranja neukrepljenog panela (sinusne funkcije) dok se dinamika sustava rješava uzimajući u obzir prednost da se radi o ortogonalnoj karakteristici reda (Rayleigh-Ritz-ova metoda). Ovu metodu koristili su mnogi autori Mejdi[15], Dozio [56], Liu [42,57] jer je točna i efikasna kad je omjer površine i debljine panela odgovarajući (širina ili visina panela maksimalno 1000 puta veća od debljine panela) i kad je potreban broj sinusnih prostornih harmonijskih valova manji od 100 po svakoj osi. Nažalost stvarne konstrukcije su često tanje i metoda nije odgovarajuća u svim situacijama.

Za rješavanje navedenih poteškoća postoji interesantna opcija: izračunati polje pomaka beskonačnog panela pa primjeniti metodu prostornog isječka (eng. *spatial windowing*) na način da samo konačni dio panela prima i stvara radijaciju. Drugim riječima, navedeno znači da se za akustički dio izračuna odnosi na konačni dio panela a vibracije na beskonačni panel. Navedenu strategiju su prvi predložili Villot i drugi [58] za slučaj pravokutnog panela oslonjenog po svojim rubovima. Na niskim frekvencijama, gdje rezonantno ponašanje normalnih oblika vibriranja nižeg reda dominira, ovaj pristup nije povoljan jer se rezonantni odziv ne može reproducirati jer se reflektirani val od vanjskog ruba nije uzeo u obzir. Međutim kako frekvencija raste i krivulja koeficijenta transmisije zvučne snage prelazi iz rezonantnog pojasa u nerezonantni pojas masenog zakona (eng. *mass law*) pa se dobilo dobro preklapanje s eksperimentima i metodom konačnih i rubnih elemenata (npr. Villot i drugi [58], Villot [59], Ghinet [60], Rhazi [61]). Razlog leži u tome što je promjena u efikasnosti radijacije koja nastaje pri promjeni beskonačne dimenzije panela u konačnu dimenziju panela dobro prepostavljena sa metodom prostornog isječka.

Slijedom te ideje nastaje rad autora Legault [44] u kojem se analizira utjecaj konačnih dimenzija na akustički odziv ortogonalno ukrepljenih panela kombiniranjem metode prostornog isječka i metode propagacije valova i uspoređujući rezultate s Rayleigh-Ritz-ovim pristupom koji se bazira na korištenju oblika vibriranja. U radu nije definirano do koje razine se beskonačni model može koristiti za modeliranje konačnog periodički oslonjenog panela koji se sastoji od manjeg broja perioda panela dok se u ostaloj literaturi navodi da će konačne dimenzije imati manje utjecaja na ukrepljene panele nego na obične panele, npr. rad autora Cotonij [14]. U radu Legaulta [44] donešen je zaključak: u slučaju kad valna duljina vala u strukturi postane red veličine ili manja od udaljenosti između oslonaca, metoda prostornog

isječka i definiranje gibanja sa redom prostornih harmonijskih valova može izračunati ponašanje konačnog jednostavnog oslonjenog panela te se navodi da se beskonačni model može koristiti na srednjim i visokim frekvencijama čak i za slučajeve kad broj perioda panela nije veći od 3 ili 4 po svakoj osi.

### 1.3. Ciljevi i struktura disertacije

U ovoj disertaciji cilj je izračunati akustički odziv pravokutnog panela koji je periodički oslonjen sa što jednostavnijim modelom da se dobije optimalna brzina izračuna i zadrži dovoljna točnost. U slučaju kad se radi o ravninskim prisilnim valovima akustičkog polja i kad je visina perioda panela najmanje 3 puta veća od njegove širine, beskonačni periodički oslonjen panel može se modelirati kao beskonačna periodički oslonjena greda pa se ona i uzela za osnovni model. Navedeno je omogućilo da jednadžba gibanja grede bude svedena na jedan period grede za čije rješavanje se koristila metoda propagacije valova [26] i metoda prostornog isječka [57]. Ujedno je analizirano i slobodno gibanje beskonačne periodički oslonjene grede te je isto uspoređeno s prisilnim gibanjem.

Međukoraci koji vode do ostvarenja spomenutih ciljeva, a istovremeno do znanstvenog doprinosa ove disertacije su sljedeći:

- razviti opći numerički model akustičkog odziva pravokutnog panela s raznim rubnim uvjetima (posebno s periodičkim osloncima) koji uključuje definiranje utjecaja raznih parametara kao što su upadni kut ravninskog akustičkog vala, fazno prigušenje, prigušenje u materijalu panela, ostale karakteristike materijala panela, krutost i prigušenje poprečne i fleksijske opruge u osloncima, masa pomicnog dijela oslonca, debljina panela i udaljenost između oslonaca. Potrebno je dokazati konvergenciju dobivenih numeričkih rezultata,
- razviti opći numerički model slobodnih vibracija pravokutnog panela s raznim rubnim uvjetima (posebno s periodičkim osloncima) koji uključuje analizu oblika vibriranja i definiranje utjecaja raznih parametara koji su već spomenuti,
- povezati prisilne i slobodne vibracije u jednu cjelinu definirajući njihovu korelaciju, i
- potvrditi numeričke rezultate s eksperimentalnim rezultatima i rezultatima odgovarajućih komercijalnih programskih paketa.

U skladu s postavljenim ciljevima struktura ove disertacije je sljedeća:

- u 2. poglavlju je opisana teorija akustičkog odziva ali i slobodnih vibracija beskonačnih periodički oslonjenih panela kao i metode koje se koriste za njegovo numeričko modeliranje. Detaljno su opisani važni parametri izračuna, osobito oni uz koje je vezan doprinos ove doktorske disertacije,
- u 3. poglavlju je predstavljen i opisan numerički program za modeliranje i procjenu akustičkog odziva i slobodnih vibracija periodički oslonjenog pravokutnog panela. Programske alat obuhvaća i dodatne skripte koje služe za prikaz dijagrama i varijabli za vrijeme izvođenja programa kao i datoteke za praćenje razvoja rezultata. Navedeni su i rezultati numeričke analize,
- u 4. poglavlju opisan je eksperimentalni model i procedura mjerjenja te su navedeni rezultati eksperimentalne analize, i
- u 5. poglavlju izведен je zaključak u kojem je dan pregled svih rezultata i doprinsa ovog istraživanja te prijedlozi za buduća istraživanja.



## Poglavlje 2.

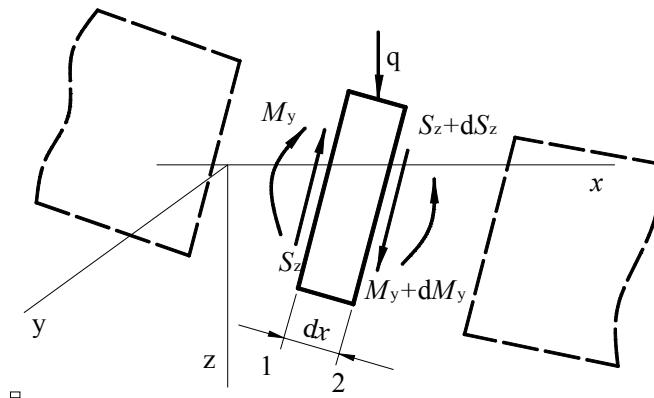
### 2. Teorijske osnove matematičkog modela

Kako je već navedeno u uvodu, u ovoj disertaciji cilj je izračunati akustički odziv periodički oslonjenog pravokutnog panela sa što jednostavnijim modelom da se dobije optimalna brzina izračuna i zadrži dovoljna točnost. U slučaju kad se radi o ravninskim prisilnim valovima akustičkog polja i kad je visina perioda jednosmjerno periodički oslonjenog panela najmanje tri puta veća od njegove širine [26] beskonačni periodički oslonjen panel može se modelirati kao beskonačna periodički oslonjena greda koja čini osnovu numeričkog modela ove disertacije. Model beskonačne periodički oslonjene grede svodi se na model jedne grede koja se periodički ponavlja.

Model slobodnih vibracija riješen je na dva načina: direktnim rješavanjem diferencijalne jednadžbe gibanja i primjenom metode virtualnog rada na diferencijalnu jednadžbu gibanja čije je rješenje definirano metodom propagirajućih valova, dok je model prisilnih vibracija (akustičkog odziva grede) riješen samo s drugom metodom. Pojedinačno su rješenja uspoređena s rješenjima metode konačnih elemenata koja su dobivena pomoću računalnih programa Femap i Actran.

## 2.1. Diferencijalna jednadžba gibanja grede po Euler-Bernoulli-evoj teoriji

Izvod jednadžbe gibanja za gredu sa konstantnim poprečnim presjekom bazira se na Bernoulli-Euler-ovojoj teoriji po kojoj se prepostavlja da poprečni presjeci grede ostaju ravni za vrijeme fleksijskih vibracija i da je radijus zakrivljenosti savijene grede velik u odnosu na progib grede.



Slika 2.1 Diferencijalni element grede s odgovarajućim silama i momentima

Prepostavlja se diferencijalna duljina presjeka je  $dx$  te paralele ravne stijenke 1 i 2 koje su okomite na neutralnu liniju grede. Na slici 2.1 su prikazane poprečne sile, momenti savijanja i poprečno opterećenje koji djeluju na diferencijalni element grede. Ukoliko je poprečni pomak grede malen kao što se prepostavlja po Bernoulli-Euler-ovojoj teoriji, tada je zakretanje elementa grede iz nedeformiranog stanja isto maleno. Pod ovim uvjetima, jednadžba gibanja po poprečnoj osi grede glasi

$$S_z + dS_z - S_z + qdx = (\rho A_g dx) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

gdje je  $A_g$  površina poprečnog presjeka,  $\rho$  je gustoća materijala a  $w$  je poprečni pomak. Ukoliko se jednadžba podijeli sa  $dx$  jednadžba gibanja ima ovaj oblik

$$\frac{dS_z}{dx} + q = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Ukoliko se, nadalje, zanemari djelovanje momenta inercije mase diferencijalnog elementa grede tada jednadžba za zakretanje diferencijalnog elementa glasi

$$-(S_z + dS_z) dx + M_y + dM_y - M_y = 0 \quad (2.3)$$

Nakon skraćivanja i zanemarivanja člana izraza  $dS_z dx$  izraz (2.3) dobiva novi oblik

$$S_z = \frac{dM_y}{dx} \quad (2.4)$$

Po klasičnoj Bernoulli- Euler teoriji zakrivljenost na bilo kojem položaju  $x$  na gredi proporcionalna je momentu savijanja tj. vrijedi

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

gdje je  $E$  modul elastičnosti materijala a  $I$  moment inercije površine poprečnog presjeka.

Iz izraza (2.4) i (2.5) i slijedi izraz za veličinu poprečne sile

$$S_z = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (2.6)$$

Ukoliko se zadnji izraz uvrsti u jednadžbu (2.2) dobiva se diferencijalna jednadžba gibanja grede

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{A_g \rho} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q}{A_g \rho} \quad (2.7)$$

S navedenim izrazom može se pratiti gibanje dugih greda pri njihovom vibriranju na nižim oblicima vibriranja.

Hookov zakon linearne elastične teorije kod jednoosnog stanja naprezanja glasi

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.8)$$

dok se Hookov zakon za ravninsko stanje naprezanja i ravnisno stanje deformacija koristi u slučajevima kad se gredom približno opisuje dugi pravokutni panel koji je oslonjen na svoje dvije uzdužne stijenke. U tom slučaju deformacija je sprječena u  $y$ - smjeru koja se nalazi u ravnini panela i poprečna je s obzirom na uzdužnu  $x$ -os:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = 0 \rightarrow \sigma_y = \nu \sigma_x \quad (2.9)$$

Uvrštavanje ovog naprezanja u Hookov zakon po  $x$ -osi daje izraz:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\nu \sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu^2) \rightarrow \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_x \quad (2.10)$$

Svi izračuni i rezultati koji slijede bazirani su na Hookovom zakonu (2.8). Međutim, opcija s ravninskim naprezanjem se može lako unijeti u izračun sa zamjenom modula elastičnosti  $E$  s  $\frac{E}{1 - \nu^2}$  (vidi odlomak 4.2.1.).

## 2.2. Slobodne vibracije beskonačne periodički oslonjene grede

Diferencijalna jednadžba slobodnog vibriranja Euler-Bernoulli-jeve grede [63] slijedi iz izraza (2.7) ako se poprečna vanjska sila izjednači s nulom  $q=0$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{A_g \rho} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (2.11)$$

### 2.2.1. Direktno rješavanje diferencijalne jednadžbe gibanja

Rješenje za diferencijalnu jednadžbu (2.11) imat će oblik

$$w = w(x) e^{i\omega t} \quad (2.12)$$

Ukoliko se navedena jednadžba uvrsti u jednadžbu (2.11) dobija se obična diferencijalna jednadžba iz koje se funkcija oblika  $w(x)$  može odrediti iz jednadžbe:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{\omega^2 A_g \rho}{EI} w = 0 \quad (2.13)$$

i opći oblik funkcije oblika  $w(x)$  glasi

$$w(x) = C_1 \sin(px) + C_2 \cos(px) + C_3 \sinh(px) + C_4 \cosh(px) \quad (2.14)$$

gdje je

$$p^4 = \frac{\omega^2 A \rho}{EI} \quad (2.15)$$

i gdje su  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$  konstante koje se određuju iz rubnih uvjeta. Za običnu gredu rubni uvjeti vezani su uz poprečne pomake u osloncu  $w$  i nagib grede u osloncu  $\frac{\partial w}{\partial x}$  te se za model periodički oslonjene beskonačne grede dijele na jednostavne oslonce i fleksijske oslonce. Za definiciju istih potrebno je definirati tzv. propagacijsku konstantu što je objašnjeno u sljedećem odlomku.

## 2.2.1.1. Jednostavni oslonci

### 2.2.1.1.1. Karakteristike propagacijskih konstanti

Propagaciju valova u periodički oslonjenim neprigušenim gredama opisali su Heckl [24] i Cremer [64]. Numerički je dokazano da valovi mogu propagirati slobodno (bez smanjivanja amplitude) samo u nekim frekvencijskim pojasevima dok se na frekvencijama izvan propagacijskih frekvencijskih pojaseva valu smanjuje amplituda dok se giba po gredi. Utvrđeno je da postoje frekvencijski pojasevi propagacije i smanjivanja amplitude koja se međusobno izmjenjuju kako frekvencija raste. Heckl [24] je definirao propagacijsku konstantu kao varijablu koja definira valno gibanje, kao mjera za promjenu amplitude i faze prilikom gibanja vala od oslonca do oslonca. Poznavanje propagacijske konstante je ključan korak za izračun odziva periodički oslonjenog panela. Slijedi određivanje propagacijske konstante za periodički oslonjeni gredu na jednostavne oslonce, tj. oslonce na kojima je omogućeno zakretanje a spriječeno je poprečno gibanje.

Jednadžba za izračun propagacijske konstante daje par konstanti, jednakih amplituda i suprotnih predznaka (predznak slijedi iz smjera gibanja ukupnog vala). Slijedi da za svaku propagacijsku konstantu na zadanoj frekvenciji postoji jedinstvena grupa prostornih harmonijskih valova koja ima valne komponente s mnogo različitih valnih duljina i valnih brzina.

Jednostavni sinusni val koji propagira uzduž beskonačne prigušene neoslonjene grede može se definirati s valnim brojem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.16)$$

Navedena veličina je jednaka razlici u fazi između dvije točke koje su na jediničnoj udaljenosti. Kompleksni broj  $\pm(\delta_a + jk)$  je propagacijska konstanta koja opisuje promjenu u fazi i iznos smanjenja amplitude po jedinici duljine grede kod valnog gibanja pa izraz za određivanje amplitude u nekoj točki  $A_2$  koja se nalazi na jediničnoj udaljenosti od točke  $A_1$  glasi

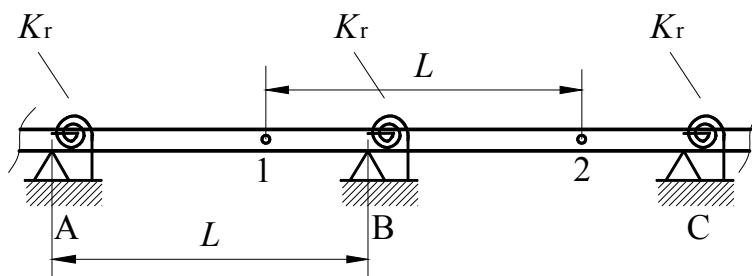
$$A_2 = e^{\delta_a} A_1$$

Negativni predznak ispred kompleksnog broja definira pozitivan smjer propagacije i smanjenje amplitude u pozitivnom smjeru  $x$ -osi, a pozitivan predznak u negativnom smjeru  $x$ -osi i povećanje amplitude.

Kod beskonačne periodički oslonjene grede vrijednost propagacijske konstante za slobodno gibanje valova mijenja se s frekvencijom vibriranja i njezin kompleksni oblik glasi:

$$\mu = \mu_r + i\mu_i \quad (2.17)$$

Realni dio propagacijske konstante  $\mu_r$  predstavlja faktor smanjenja amplitude a imaginarni dio propagacijske konstante  $\mu_i$  predstavlja faznu razliku između veličina odziva u točkama  $L$  i  $R$ . Sve veličine vezane uz odziv na nekom položaju unutar promatranog perioda grede povezane su s istima u točki susjednog perioda grede koja se nalazi na udaljenosti  $L$  (udaljenost između oslonaca) od početne točke s kompleksnom propagacijskom konstantnom  $\mu$ , koja je jednaka za cijelu beskonačnu gredu.

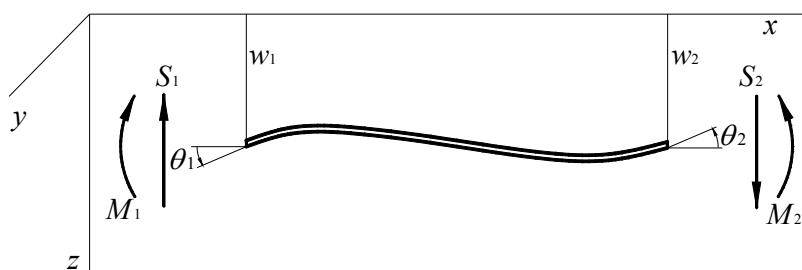


Slika 2.2 Beskonačna greda periodički oslonjena na jednostavne oslonce

Navedena veza za zakret  $\theta$  (kut nagiba tangente na elastičnu liniju) i moment  $M$  u dvije točke 1 i 2 u susjednim periodima glasi (slika 2.3):

$$\theta_2 = e^{\mu} \theta_1 \quad (2.18)$$

$$M_2 = e^{\mu} M_1 \quad (2.19)$$



Slika 2.3 Pozitivni pomaci i zakreti perioda grede

Pseudo valna duljina propagacije u gredi definira se iz udaljenosti između oslonaca  $L$ :

$$\lambda = \frac{2\pi L}{\mu_i} \quad (2.20)$$

S obzirom na navedenu valnu duljinu i na zadanu frekvenciju vibracije dobija se fazna brzina slobodnog fleksijskog vala s izrazom

$$c_n = \lambda f \quad (2.21)$$

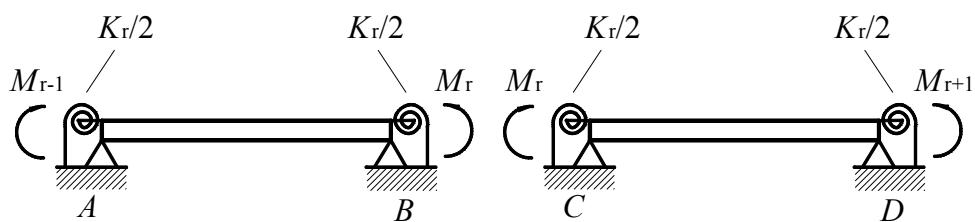
Izraz za broj fleksijskog pseudo vala u gredi jednak je valnom broju beskonačne neoslonjene grede:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\mu_i}{L} \quad (2.22)$$

Broj vrijednosti propagacijskih konstanti jednak je broju stupnjeva sloboda gibanja u osloncima. Vrijednosti  $\mu$  i iz njih valne duljine propagacije fleksijskih valova u gredi ovise jedino o prirodi strukture i zadanoj frekvenciji.

Obični sinusni valovi ne mogu propagirati u periodično oslonjenoj gredi jer dolazi do refleksija u osloncima kao i drugih efekata bliskog polja zbog kojih rješenje funkcije oblika vibriranja panela uključuje i trigonometrijske funkcije kosinus hiperbolni i sinus hiperbolni. Klasičnim rješenjem pomoću Fourierovog reda sinus i kosinus funkcija ne može se izraziti ukupni val.

Iz izračunate propagacijske konstante slijedi jedinstveni oblik poprečnih pomaka u slobodnom periodu grede. Svi slobodni periodi grede vibriraju u istom obliku vibriranja, ali s faznim i amplitudnom razlikom između njih. Svaka od konstanti je povezana s određenim oblikom poprečnih pomaka tj. s frekvencijom.



Slika 2.4 *Momenti koji djeluju na period grede*

Za slučaj dviju susjednih perioda grede  $A-B$  i  $B-C$  (slika 2.4) koje su na njihovim krajevima oslonjene na jednostavne oslonce sa fleksijskim oprugama krutosti  $K_r/2$  ukupna fleksijska krutost u osloncu iznosi  $K_r$ .

Svaki period grede opterećen je i s njezinom poprečnom inercijalnom silom i harmonijskim momentima na rubovima perioda grede od susjednih perioda grede. Ovi momenti označeni su s  $M_{r-1}$ ,  $M_r$ ,  $M_{r+1}$  i potrebno je naglasiti da se radi o harmonijskim promjenjivim veličinama, koje imaju realne i imaginarnе vrijednosti.

Zakreti u osloncima jednog perioda grede mogu se povezati s veličinom momenata  $M$  i prijenosne funkcije zakretanja  $\beta$  [63]. Prijenosne funkcije zakretanja ovise o frekvenciji vibracija. Zakret  $\theta_B$ , na desnom kraju perioda grede A-B, može se opisati s izrazom

$$\theta_B = \beta_{BA} M_{r-1} + \beta_{BB} M_r \quad (2.23)$$

gdje je  $\beta_{BA}$  zakret u točki B zbog jediničnog momenta u točki A a  $\beta_{BB}$  zakret u točki B zbog jediničnog momenta u točki B.

Zakret  $\theta_C$  na lijevom kraju perioda grede C-D može se definirati u sličnom obliku

$$\theta_C = \beta_{CC} M_r + \beta_{CD} M_{r+1} \quad (2.24)$$

gdje su  $\beta_{CC}$  i  $\beta_{CD}$  prijenosne funkcije zakretanja.

Ako su pozitivni smjerovi momenata definirani kao na slici 2.3 tj. ako pozitivni momenti gledaju u suprotnom smjeru od gibanja kazaljke na satu onda su zakreti  $\theta_A$  i  $\theta_B$  oba pozitivna i onda vrijedi  $\beta_{BB} = -\beta_{CC}$ . Isto tako, iz recipročne vrijednosti prijenosnih funkcija zakretanja slijedi  $\beta_{BA} = -\beta_{AB}$  pa iz sličnosti perioda grede slijedi  $\beta_{BA} = -\beta_{CD}$ .

Zakreti u osloncima perioda grede  $\theta_B$  i  $\theta_C$  moraju biti vezani izrazom (2.18) da bi kontinuitet pomaka i zakreta u osloncima bio održiv. Iz izraza (2.23) i (2.24) te odnosa između prijenosnih funkcija dolazi se do izraza:

$$M_{r-1} + 2 \frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} M_r + M_{r+1} = 0 \quad (2.25)$$

Identična jednadžba može se primjeniti za sve oslonce periodički oslonjene grede. Opisani skup jednadžbi bit će zadovoljen s ponavljajućim odnosom između momenata u osloncima:

$$\begin{aligned} M_{r+1} &= e^\mu M_r \\ M_r &= e^{-\mu} M_{r-1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Uvrštavajući zadnje odnose (2.26) u jednadžbu (2.25) dolazi se do jednadžbe

$$e^\mu + e^{-\mu} = -2 \frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} \quad (2.27)$$

ili

$$\cosh \mu = -\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} \quad (2.28)$$

što je izraz za određivanje propagacijske konstante  $\mu$ .

Desna strana izraza (2.28) ovisi o zadanoj frekvenciji i bit će kompleksna ukoliko postoji prigušenje u gredi stoga je propagacijska konstanta  $\mu$  kompleksna veličina i ovisi o frekvenciji.

Prijenosne funkcije  $\beta_{BB}$  i  $\beta_{BA}$  izračunavaju se iz frekvencije, mase grede, krutosti i prigušenje grede i krutosti fleksijske opruge  $K_r$  u osloncima. Izračun ovih funkcija sastoji se u primjeni metoda opisanih u literaturi [63]. Omjer između prijenosnih funkcija  $\beta_{BB}$  i  $\beta_{BA}$  može se izračunati i sa jednostavnijom metodom koja uzima u obzir osnovne karakteristike gibanja vala. Karakteristika ovog oblika gibanja valova je da su sve vektorske veličine koje slijede iz gibanja vala u jednoj točki perioda grede (pomak, zakret, moment i poprečna sila) vezane s odgovarajućim veličinama u točki susjednog perioda grede na udaljenosti  $L$  od početne točke jednakoj udaljenosti između oslonaca. Navedene veličine su vezane sa izrazima istog oblika kao i momenti u jednadžbi (2.26). S obzirom da se krajevi perioda grede (npr. točke A i B) nalaze na udaljenosti L navedene vektorske veličine su u istoj vezi. Slijedi, da za promatranu period grede vrijede izrazi jednaki izrazima (2.18) i (2.19) i za oslonce A i B:

$$\theta_B = e^\mu \theta_A \quad (2.29)$$

i

$$M_{r-1} = e^\mu M_r \quad (2.30)$$

pa iz izraza za zakret u točkama B i A slijedi

$$\begin{aligned} \theta_B &= \beta_{BB} M_r + \beta_{BA} M_{r-1} \\ \theta_A &= \beta_{AB} M_r + \beta_{AA} M_{r-1} = -\beta_{BA} M_r - \beta_{BB} M_{r-1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Iz jednadžbi (2.29), (2.30) i (2.31) slijedi izraz

$$M_r (\beta_{BB} + e^\mu \beta_{BA}) = -e^\mu M_r (\beta_{BA} + e^{-\mu} \beta_{BB})$$

iz čega slijedi izraz

$$e^\mu = -\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} \quad (2.32)$$

iz kojeg se vidi veza između  $e^\mu$  i  $\cosh(\mu)$  koja je karakteristična za zadane rubne uvjete te će se koristiti u dalnjem izvodu

$$\cosh(\mu) = \frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2} = e^\mu \quad (2.33)$$

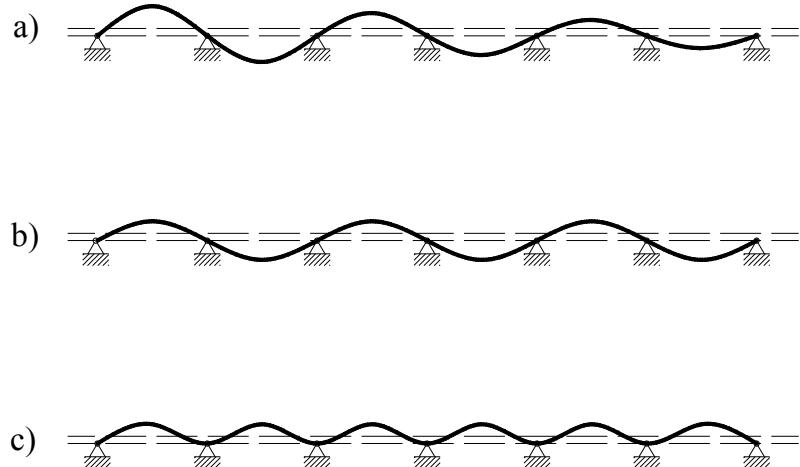
U slučaju kad je greda neprigušena, omjer između prijenosnih funkcija  $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}}$  ima realnu vrijednost u skupu brojeva između  $\pm\infty$  pa za gredu na jednostavnim osloncima propagacijske konstante imaju ove vrijednosti u ovisnosti o vrijednosti omjera  $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}}$ :

- u slučaju kad je  $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} > +1$  propagacijska konstanta ima realnu vrijednost ( $\mu_r$ ) i postoji konstantno eksponencijalno smanjivanje amplitude pri širenju vala iz jednog perioda grede u drugi. S obzirom da propagacijska konstanta  $\mu$  nema imaginarnu komponentu ne postoji fazna razlika između valova u susjednim periodima grede tj. val ne propagira pa nema niti propagacije valne energije,
- u slučaju kad je  $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} < -1$  propagacijska konstanta ima oblik  $\mu_r + i\pi$ , imaginarni dio definira gibanje susjednih perioda grede u protufazi i smanjuje mu se amplituda ali val još uvijek ne propagira, i
- u slučaju kad je  $-1 < -\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} < 1$  onda je propagacijska konstanta imaginarna ( $i\mu_i$ ) i definirana je s jednadžbom

$$\cos \mu_i = -\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} \quad (2.34)$$

tj. vidljivo je da imaginarna propagacijska konstanta ima više vrijednosti za zadalu frekvenciju što slijedi iz trigonometrijske funkcije  $\cos \mu_i$  (slika 2.7 ).

Iz činjenice da imaginarna komponenta propagacijske konstante  $\mu_i$  ima vrijednost koja nije jednaka  $\pi$  ili 0 slijedi da postoji razlika u fazi između gibanja susjednih perioda grede, što znači da val propagira te da se valna energija giba po gredi. S druge strane realna propagacijska konstanta jednaka je 0 što znači da se amplituda ne smanjuje pri gibanju vala kroz oslonce.



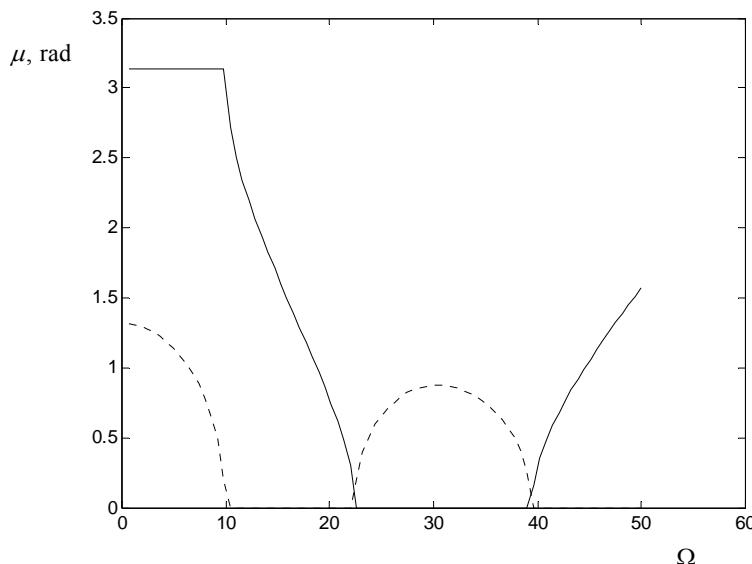
Slika 2.5 *Oblici vibriranja: a) na niskoj frekvenciji u prvom stojnom frekventnom pojasu, b) na donjoj graničnoj frekvenciji i c) gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog frekventnog pojasa*

Za najniže frekvencije vrijedi  $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} < -1$  pa u tom frekvenčijskom pojasu valovi ne propagiraju (slika 2.5a) već nastaju stojni valovi. Kako frekvencija raste smanjenje amplitude opada sve do frekvencije za koju je  $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} = -1$ . Propagacija slobodnih valova sada je moguća te je brzina širenja vala opisana s imaginarnom propagacijskom konstantom  $\mu_i$ . Na frekvenciji za koju je  $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} = +1$  imaginarna propagacijska konstanta je opet jednaka nuli pa propagacija prestaje i započinje frekvenčijski pojas u kojem se smanjuje amplituda valova i gdje nema propagacije. Pri dalnjem rastu frekvencija izmjenjuju se pojasevi s propagacijskim i stojnim valovima kako su prvi opisali Cremer i Leilich [65].

Imaginarne i realne komponente kompleksnih propagacijskih konstanti prikazane su na slici 2.6 u funkciji o bezdimenzijskom parametru frekvencije koji se definira s izrazom

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{m_g L^4}{EI}} \quad (2.35)$$

gdje je  $\omega$  kružna frekvencija vibriranja,  $m_g = A_g \rho$  je specifična mase grede gdje je  $A_g$  površina poprečnog presjeka grede a  $\rho$  gustoća materijala grede,  $L$  je udaljenost između oslonaca i  $EI = D$  je fleksijska krutost grede.



Slika 2.6 Vrijednosti kompleksnih propagacijskih konstanti (imaginarni dio \_\_\_\_\_ i realni dio -----) u funkciji o bezdimenzijskom frekvencijskom parametru  $\Omega$

Granične frekvencije propagacijskih pojaseva imaju veliku važnost u analizi akustičkog odziva periodički oslonjene grede.

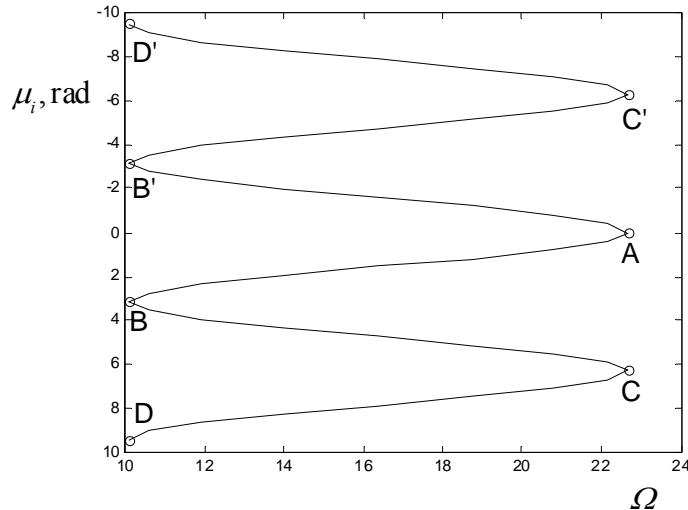
Donja granična frekvencija prvog frekvencijskog propagacijskog pojasa po iznosu i obliku jednaka je prvoj vlastitoj frekvenciji grede konačne duljine jednog perioda beskonačne grede koja je jednostavno oslonjena na oba ruba (na slici 2.6,  $\Omega \approx 10$ ). Susjedni periodi grede vibriraju u protufazi ( $\mu_i = \pi$ ) i nema propagacije vala niti smanjivanja amplitudne vibriranja između susjednih perioda grede ( $\mu_r = 0$ ). Trenutni stojni val na navedenoj frekvenciji prikazan je na slici 2.5b.

Na frekvencijama nižim od donje granične frekvencije susjedni periodi grede vibriraju u protufazi ( $\mu_i = \pi$ ) i nema propagacije vala (slika 2.5a) ali dolazi do smanjivanja amplitudne vibriranja između susjednih perioda grede ( $\mu_r > 0$ ).

Gornja granična frekvencija prvog frekvencijskog propagacijskog pojasa po iznosu i obliku jednaka je prvoj vlastitoj frekvenciji grede konačne duljine jednog perioda beskonačne grede koja je uklještena na oba ruba (na slici 2.6,  $\Omega \approx 23$ ). Susjedni periodi grede vibriraju u fazi ( $\mu_i = 0$ ) i nema propagacije vala (slika 2.5 c) niti smanjivanja amplitudne vibriranja između susjednih perioda grede ( $\mu_r = 0$ ).

Između donje i gornje vlastite frekvencije dolazi do propagacije ( $-\pi < \mu_i < 0$ ) valova s konstantnom amplitudom ( $\mu_r = 0$ ) čiji je oblik kombinacija oblika na slikama 2.5 b i c .

Izraz (2.34) upućuje da imaginarna propagacijska konstanta ima više vrijednosti. Njezine vrijednosti za 1. propagacijski pojas su prikazane u dijagramu na slici 2.7.



Slika 2.7 Sekundarne vrijednosti imaginarne propagacijske konstante za 1. propagacijski frekvencijski pojas

Sve vrijednosti propagacijskih konstanti koriste se u krajnjem izrazu (2.63) za izračun poprečnih pomaka po metodi propagacije valova te su one prikazane na slici 2.15 dok se u funkciji oblika dobivenoj s direktnim rješavanjem direfencijalne jednadžbe gibanja koristi jedna vrijednost realne i imaginarnе komponente propagacijske konstante koja se izračunava iz izraza (2.48).

### 2.2.1.1.2. Funkcija oblika vibriranja

Oblik slobodnog vibriranja periodički oslonjene grede rješenje je ranije definirane diferencijalne jednadžbe (2.13). Navedeni se izraz može pojednostaviti uvrštavajući izraz (2.15) pa slijedi izraz

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - p^4 w = 0 \quad (2.36)$$

Opće rješenje jednadžbe (2.36) opisano je izrazom (2.14)

$$w(x) = C_1 \sin(px) + C_2 \cos(px) + C_3 \sinh(px) + C_4 \cosh(px)$$

pri čemu je potrebno zadovoljiti sljedeće rubne uvjete:

$$\begin{aligned} \text{na } x=0, \quad w=w_1=0, \quad w'=\theta_1, \\ \text{a na } x=L, \quad w=w_2=0, \quad w'=\theta_2=e^\mu \theta_1. \end{aligned}$$

Pozitivni pomaci i zakreti definirani su na slici 2.3 [66].

Matrični zapis općeg rješenja s uvrštenim rubnim uvjetima glasi

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{c} \quad (2.37)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 = 0 \\ \theta_1 \\ w_2 = e^\mu w_1 = 0 \\ e^\mu \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(p \cdot 0) & \cos(p \cdot 0) & \sinh(p \cdot 0) & \cosh(p \cdot 0) \\ p \cos(p \cdot 0) & -p \sin(p \cdot 0) & p \cosh(p \cdot 0) & p \sinh(p \cdot 0) \\ \sin(pL) & \cos(pL) & \sinh(pL) & \cosh(pL) \\ p \cos(pL) & -p \sin(pL) & p \cosh(pL) & p \sinh(pL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

koji nakon skraćivanja ima oblik

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ e^\mu \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ p & 0 & p & 0 \\ \sin(pL) & \cos(pL) & \sinh(pL) & \cosh(pL) \\ p \cos(pL) & -p \sin(pL) & p \cosh(pL) & p \sinh(pL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Vrijednosti koeficijenata  $C_i$  računaju se pomoću matričnog izraza

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{y} \quad (2.39)$$

iz kojeg slijede izrazi za koeficijente  $C_i$ , pojednostavljeni pomoću funkcija  $F_1, \dots, F_{10}$  [63] :

$$C_1 = \frac{\theta_1}{2p} \frac{(\underbrace{e^\mu (\cosh(pL) - \cos(pL))}_{-F_{10}} + \underbrace{\cos(pL)\cosh(pL)-1}_{\overbrace{\cos(pL)\cosh(pL)-1}^{F_3}} + \underbrace{\sin(pL)\sinh(pL)}_{F_1}))}{\underbrace{F_3}_{F_3}}$$

$$C_1 = K \frac{F_1 + F_3 - e^\mu F_{10}}{F_3} \quad (2.40)$$

$$C_2 = \frac{\theta_1}{2p} \frac{(\underbrace{e^\mu (\sin(pL) - \sinh(pL))}_{F_8} + \underbrace{\cos(pL)\sinh(pL) - \cosh(pL)\sin(pL)}_{\underbrace{(1-\cos(pL)\cosh(pL))}_{-F_3}}))}{\underbrace{-F_3}_{F_5}}$$

$$C_2 = K \frac{F_5 + e^\mu F_8}{F_3} \quad (2.41)$$

$$C_3 = \frac{\theta_1}{2p} \frac{(\underbrace{e^\mu (\cosh(pL) - \cos(pL))}_{-F_{10}} - \underbrace{(\cos(pL)\cosh(pL)-1)}_{\underbrace{\cos(pL)\cosh(pL)-1}_{F_3}} + \underbrace{\sin(pL)\sinh(pL)}_{F_1}))}{\underbrace{F_3}_{F_3}}$$

$$C_3 = -K \frac{F_1 - F_3 - e^{\mu} F_{10}}{F_3} \quad (2.42)$$

$$C_4 = \frac{\theta_1}{2p} \frac{(e^{\mu} (\sin(pL) - \sinh(pL)) + \cos(pL)\sinh(pL) - \cosh(pL)\sin(pL))}{\frac{(1 - \cos(pL)\cosh(pL))}{-F_3}} \quad (2.43)$$

$$C_4 = K \frac{F_5 + e^{\mu} F_8}{-F_3} \quad (2.43)$$

pa funkcija oblika definirana izrazom (2.14) poprima novi izgled

$$w(x) = C_4 \left( \cosh(px) + \frac{C_2}{C_4} \cos(px) + \frac{C_3}{C_4} \sinh(px) + \frac{C_1}{C_4} \sin(px) \right)$$

gdje za omjere koeficijenata  $C_i$  vrijede sljedeći izrazi

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{C_4} &= \frac{K \frac{F_5 + e^{\mu} F_8}{-F_3}}{K \frac{F_5 + e^{\mu} F_8}{-F_3}} = -1 \\ \frac{C_3}{C_4} &= \frac{-K \frac{F_1 - F_3 - e^{\mu} F_{10}}{F_3}}{K \frac{F_5 + e^{\mu} F_8}{-F_3}} = \frac{F_1 - F_3 - e^{\mu} F_{10}}{F_5 + e^{\mu} F_8} \\ \frac{C_1}{C_4} &= \frac{K \frac{F_1 + F_3 - e^{\mu} F_{10}}{F_3}}{K \frac{F_5 + e^{\mu} F_8}{-F_3}} = \frac{-F_1 - F_3 + e^{\mu} F_{10}}{F_5 + e^{\mu} F_8} \end{aligned}$$

pa konačni izraz za funkciju oblika slobodnih vibracija periodički oslonjene grede glasi

$$w(x) = C_4 \left( \cosh(px) - \cos(px) + \sinh(px) \frac{F_1 - F_3 - e^{\mu} F_{10}}{F_5 + e^{\mu} F_8} + \sin(px) \frac{-F_1 - F_3 + e^{\mu} F_{10}}{F_5 + e^{\mu} F_8} \right) \quad (2.44)$$

Točnost dobivenih konstanti  $C_i$  provjerit će se s njihovim uvrštavanjem u izraz (2.38)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ e^{\mu}\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ p & 0 & p & 0 \\ \sin(pL) & \cos(pL) & \sinh(pL) & \cosh(pL) \\ p \cdot \cos(pL) & -p \cdot \sin(pL) & p \cdot \cosh(pL) & p \cdot \sinh(pL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

pa iz množenja matrice slijede ove jednakosti

$$\text{- za 1. redak } 0 = C_2 + C_4 = \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_5 + e^\mu F_8}{F_3} + \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_5 + e^\mu F_8}{-F_3} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{- za 2. redak } \theta_1 &= pC_1 + pC_3 = p \left( \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_1 + F_3 - e^\mu F_{10}}{F_3} + \frac{\theta_1}{2p} \frac{-F_1 + F_3 + e^\mu F_{10}}{F_3} \right) \\ &= \frac{\theta_1}{2F_3} (F_1 + F_3 - e^\mu F_{10} - F_1 + F_3 + e^\mu F_{10}) = \theta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- za 3. redak } 0 &= C_1 \sin(pL) + C_2 \cos(pL) + C_3 \sinh(pL) + C_4 \cosh(pL) \\ &= \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_1 + F_3 - e^\mu F_{10}}{F_3} \sin(pL) + \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_5 + e^\mu F_8}{F_3} \cos(pL) \\ &\quad + \frac{\theta_1}{2p} \frac{-F_1 + F_3 + e^\mu F_{10}}{F_3} \sinh(pL) + \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_5 + e^\mu F_8}{-F_3} \cosh(pL) \\ &= \underbrace{\frac{\theta_1}{2p} (\sin(pL) + \sinh(pL))}_{F_7} + \underbrace{\frac{\theta_1}{2p} \frac{F_1 - e^\mu F_{10}}{F_3} (\sin(pL) - \sinh(pL))}_{F_8} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{\theta_1}{2p} \frac{F_5 + e^\mu F_8}{F_3} (\cos(pL) - \cosh(pL))}_{F_{10}} \\ &= \frac{\theta_1}{2p} \left( F_7 + \frac{F_1 F_8 + F_5 F_{10}}{F_3} \right) = 0 \end{aligned}$$

i

$$\text{- za 4. redak } e^\mu \theta_1 = C_1 p \cdot \cos(pL) - C_2 p \cdot \sin(pL) + C_3 p \cdot \cosh(pL) + C_4 p \cdot \sinh(pL)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_1 + F_3 - e^\mu F_{10}}{F_3} p \cos(pL) - \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_5 + e^\mu F_8}{F_3} p \sin(pL) + \\ &\quad + \frac{\theta_1}{2p} \frac{-F_1 + F_3 + e^\mu F_{10}}{F_3} p \cdot \cosh(pL) + \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_5 + e^\mu F_8}{-F_3} p \cdot \sinh(pL) \\ &= \frac{\theta_1}{2p} \cancel{p} \underbrace{(\cos(pL) + \cosh(pL))}_{F_9} + \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_1 - e^\mu F_{10}}{F_3} \cancel{p} \underbrace{(\cos(pL) - \cosh(pL))}_{F_{10}} - \\ &\quad - \frac{\theta_1}{2p} \frac{F_5 + e^\mu F_8}{F_3} \cancel{p} \underbrace{(\sin(pL) + \sinh(pL))}_{F_7} \\ &= \frac{\theta_1}{2} \left( F_9 + \frac{F_1 - e^\mu F_{10}}{F_3} F_{10} - \frac{F_5 + e^\mu F_8}{F_3} F_7 \right) = e^\mu \theta_1 \end{aligned}$$

čime je dokazana točnost izračunate funkcije oblika (2.44).

U lit. [33] određena je sljedeća funkcija oblika

$$w(x) = A \left\{ \cosh px - \cos px + \sinh px \left( \frac{F_1 - F_2 - e^\mu F_{10}}{F_5 - e^\mu F_7} \right) + \right. \\ \left. + \sin px \left( \frac{2F_{10}}{F_7 + F_8} - \frac{(F_7 - F_8)(F_1 - F_2 - e^\mu F_{10})}{(F_7 + F_8)(F_5 - e^\mu F_7)} \right) \right\}. \quad (2.45)$$

Podudarnost navedene funkcije bit će uspoređena s funkcijom oblika (2.44) u odlomku 3.3.5. Slijedi zapis svih funkcija  $F_i$  po literaturi [63] koje su korištene za izračun funkcije oblika slobodnih vibracija periodički oslonjene beskonačne grede na jednostavne oslonce

$$\begin{aligned} F_1 &= \sin(pL) \sinh(pL) \\ F_2 &= \cos(pL) \cosh(pL) \\ F_3 &= \cos(pL) \cosh(pL) - 1 = F_2 - 1 \\ F_5 &= \cos(pL) \sinh(pL) - \sin(pL) \cosh(pL) \\ F_7 &= \sin(pL) + \sinh(pL) \\ F_8 &= \sin(pL) - \sinh(pL) \\ F_9 &= \cos(pL) + \cosh(pL) \\ F_{10} &= \cos(pL) - \cosh(pL) \end{aligned} \quad (2.46)$$

### 2.2.1.1.3. Izračun propagacijskih konstanti

Za izračun propagacijskih konstanti potrebno je poprečne pomake i zakrete povezati s vanjskim harmonijskim poprečnim silama ( $S_1$  i  $S_2$ , slika 2.3 ) i momentima savijanja ( $M_1$  i  $M_2$ ) na krajevima perioda grede pomoću mehaničke impedance grede (matrica krutosti). Ukoliko je smjer navedenih sila i momenata isti kao i pozitivan smjer definiran na slici 2.3 one su pozitivne i obratno, ukoliko je suprotan one su negativne. Matrični oblik jednadžbi s kojima se povezuju sile i pomaci glasi,

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ M_1 \\ S_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{F_3} \begin{bmatrix} -p^3 F_6 & -p^2 F_1 & p^3 F_7 & p^2 F_{10} \\ & pF_5 & -p^2 F_{10} & pF_8 \\ & & -p^3 F_6 & p^2 F_1 \\ & & & pF_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{simetrično} \quad (2.47)$$

gdje je matrica  $\mathbf{Z}$  mehanička impedanca grede,  $\mathbf{f}$  vektor poprečnih sila i momenata savijanja i  $\mathbf{u}$  vektor pomaka i zakreta na rubovima grede. Funkcije  $F_i$  definirane su u literaturi [63].

Nakon uvrštavanja rubnih uvjeta u izraz (2.47)

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ M_1 \\ S_1 e^\mu \\ -M_1 e^\mu \end{bmatrix} = \frac{EI}{F_3} \begin{bmatrix} -p^3 F_6 & -p^2 F_1 & p^3 F_7 & p^2 F_{10} \\ -p^2 F_1 & p F_5 & -p^2 F_{10} & p F_8 \\ p^3 F_7 & -p^2 F_{10} & -p^3 F_6 & p^2 F_1 \\ p^2 F_{10} & p F_8 & p^2 F_1 & p F_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 = 0 \\ \theta_1 \\ w_1 e^\mu = 0 \\ \theta_1 e^\mu \end{bmatrix}$$

izraz za određivanje propagacijskih konstanti slijedi iz jednakosti u 4. redu matrice

$$-M_1 e^\mu = \frac{EI}{F_3} (p F_8 \theta_1 + p F_5 \theta_1 e^\mu)$$

koja nakon preuređivanja ima oblik

$$e^{-\mu} = -\frac{F_5}{F_8} - \frac{K_r L}{EI} \frac{(F_8^2 - F_5^2)}{4 p F_1 F_8}$$

Konačni izraz za određivanje propagacijskih konstanti (2.46) dobiva se uzimajući u obzir jednakost (2.33) i glasi

$$\cosh \mu = -\frac{F_5}{F_8} - \frac{\kappa}{4p} \frac{(F_8^2 - F_5^2)}{F_1 F_8} \quad (2.48)$$

gdje je

$$\kappa = \frac{K_r L}{EI} \quad (2.49)$$

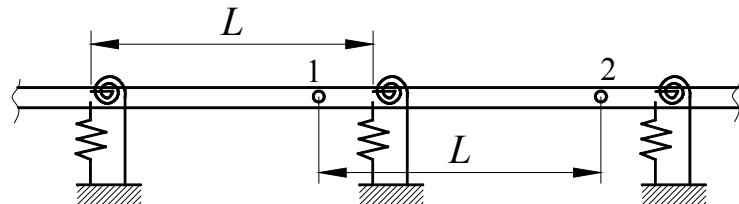
Iz činjenice da sve funkcije  $F_i$  ovise o parametru  $p$  (tj. kružnoj frekvenciji  $\omega$ , izraz (2.15)) i da u izrazu (2.48) osim parametra  $p$  postoje samo konstante vezane uz karakteristike grede i rubne uvjete slijedi da je funkcija oblika definirana u cijelosti s propagacijskom konstantom. S obzirom da je za zadane jednostavne oslonce određena jedna vrijednost propagacijske konstante  $\mu$  za svaku frekvenciju postoji jedan oblik vibriranja na jednoj frekvenciji. Potrebno je primjetiti i da propagacijska konstanta ima jednakе pozitivne i negativne vrijednosti. Negativna vrijednost odgovara valu koji se giba u pozitivnom smjeru  $w_+(x)$  dok pozitivna vrijednost odgovara valu koji se giba u negativnom smjeru  $w_-(x)$ . Uvrštavajući prvo pozitivnu pa negativnu vrijednosti propagacijske konstante u izraz (2.44) slijedi jednakost

$$w_+(x) = w_-(L-x).$$

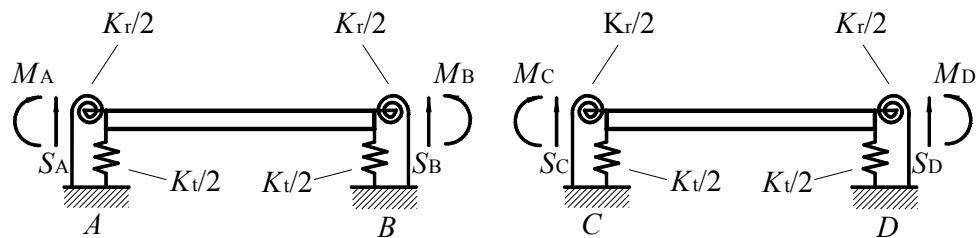
Uspješnim izračunom funkcije oblika i propagacijskih konstanti u potpunosti je definirano slobodno vibriranje beskonačne periodički oslonjene grede.

### 2.2.1.2. Elastični oslonci

Kod elastičnih oslonaca mogući su zakreti i poprečni pomaci u osloncima. U osloncima sad djeluje i poprečna opruga, slike 2.8 i 2.9



Slika 2.8. Beskonačna greda na jednako udaljenim elastičnim osloncima



Slika 2.9. Dva susjedna perioda grede s poprečnim pomacima i zakretima u osloncima

Greda je oslonjena na oslonce koji imaju poprečnu krutost  $K_t$  (slika 2.9.). Kontinuitet poprečnih pomaka mora biti osiguran u svakom osloncu kao i kontinuitet zakreta. Poprečne sile  $S_A, S_B$  koje djeluju na oba kraja perioda grede sada na ovaj način mogu biti uključene u jednadžbe gibanja modela s elastičnim osloncima.

Uzimajući u obzir karakteristike gibanja vala kroz periodički oslonjenu gredu i činjenicu da sada postoji više propagacijskih konstanti na jednoj frekvenciji veza između zakreta na krajevima perioda grede ima matričnu vezu

$$\begin{aligned}\theta_B &= e^{\mu} \theta_A \\ w_B &= e^{\mu} w_A\end{aligned}\quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}S_B &= e^{\mu} S_A \\ M_B &= e^{\mu} M_A\end{aligned}\quad (2.51)$$

Vrijede izrazi

$$\begin{aligned}\theta_A &= \beta_{AA} M_A + \beta_{AB} M_B + \gamma_{AA} S_A + \gamma_{AB} S_B \\ \theta_B &= \beta_{BA} M_A + \beta_{BB} M_B + \gamma_{BA} S_A + \gamma_{BB} S_B \\ w_A &= \delta_{AA} M_A + \delta_{AB} M_B + \alpha_{AA} S_A + \alpha_{AB} S_B \\ w_B &= \delta_{BA} M_A + \delta_{BB} M_B + \alpha_{BA} S_A + \alpha_{BB} S_B\end{aligned}\quad (2.52)$$

gdje prijenosne funkcije  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  i  $\gamma$  imaju ova značenja:

- $\gamma_{AB}$  je zakret u točki  $A$  zbog jedinične promjene sile u točki  $B$ ,
- $\delta_{AB}$  je poprečni pomak u točki  $A$  zbog jediničnog promjene momenta u točki  $B$ , i
- $\alpha_{AB}$  je poprečni pomak u točki  $A$  zbog jedinične promjene sile u točki  $B$ .

U izrazu (2.52) pojavljuju se novi odnosi između prijenosnih funkcija koji glase

$$\begin{aligned}\beta_{BB} &= -\beta_{BA}; \quad \beta_{AB} = -\beta_{BA}; \quad \gamma_{AA} = \gamma_{BB}; \quad \delta_{AA} = \delta_{BB}; \\ \alpha_{AA} &= -\alpha_{BB}; \quad \alpha_{AB} = -\alpha_{BA}; \quad \delta_{AB} = \delta_{BA} = \gamma_{AB} = \gamma_{BA}\end{aligned}\quad (2.53)$$

Nakon uvrštavanja jednadžbi (2.52) u jednadžbe (2.50) i upotrebljavajući odnose između prijenosnih funkcija (2.53) dolazi se do izraza

$$\begin{aligned}(\beta_{BA} + e^\mu \beta_{BB}) M_A + (\beta_{BB} + e^\mu \beta_{BA}) M_B + (\gamma_{BA} - e^\mu \gamma_{BB}) S_A + (\gamma_{BB} - e^\mu \gamma_{BA}) S_B &= 0 \\ (\gamma_{BA} - e^\mu \delta_{BB}) M_A + (\beta_{BB} - e^\mu \gamma_{BA}) M_B + (\alpha_{BA} + e^\mu \alpha_{BB}) S_A + (\alpha_{BB} + e^\mu \alpha_{BA}) S_B &= 0.\end{aligned}$$

Uvrštavajući jednadžbe (2.51) u zadnja dva izraza i skraćivanjem varijabli  $S_B$  i  $M_B$  dobiva se izraz

$$\begin{bmatrix} (\beta_{BA} + 2e^\mu \beta_{BB} + e^{2\mu} \beta_{BA}) & \gamma_{BA} (1 - e^{2\mu}) \\ \gamma_{BA} (1 - e^{2\mu}) & (\alpha_{BA} + 2e^\mu \alpha_{BB} + e^{2\mu} \alpha_{BA}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ S_A \end{bmatrix} = 0 \quad (2.54)$$

Determinanta matrice s koeficijentima mora biti jednak nuli za netrivijalna rješenja. Svaki član determinante može se podijeliti s  $e^\mu$  i onda, iz jednakosti

$$e^\mu + \frac{1}{e^\mu} = 2 \cosh \mu; \quad e^\mu - \frac{1}{e^\mu} = 2 \sinh \mu \quad (2.55)$$

slijedi uvjet

$$\begin{bmatrix} \beta_{BA} \cosh \mu + \beta_{BB} & -\gamma_{BA} \sinh \mu \\ -\gamma_{BA} \sinh \mu & \alpha_{BA} \cosh \mu + \alpha_{BB} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.56)$$

Razvojem determinante slijedi izraz

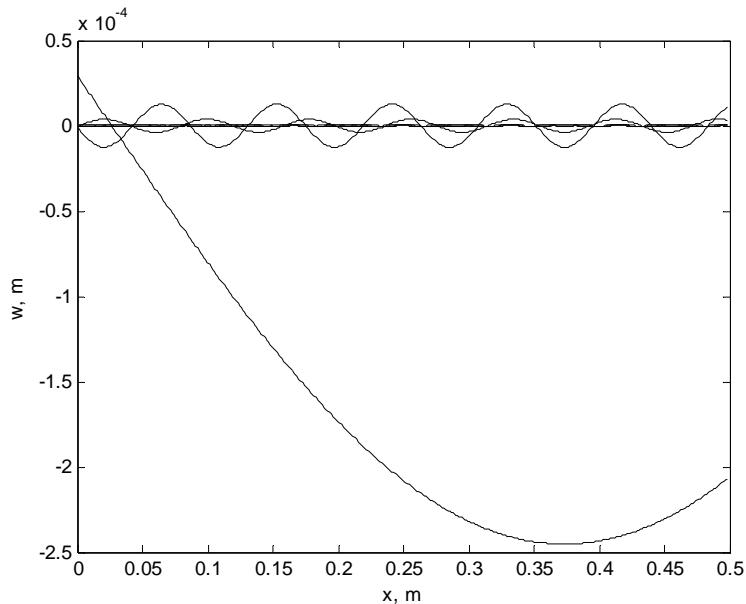
$$(\beta_{BA} \alpha_{BA} - \gamma_{BA}^2) \cosh^2 \mu + (\alpha_{BA} \beta_{BB} + \alpha_{AB} \beta_{BA}) \cosh \mu + (\alpha_{BB} \beta_{BB} + \gamma_{BA}^2) = 0 \quad (2.57)$$

Time je dobivena kvadratna jednadžba za  $\cosh \mu$  pa slijedi da postoje dvije vrijednosti  $\mu$  za svaku frekvenciju. Funkcija oblika perioda grede definirana je izrazom koji ima isti oblik kao i izraz (2.44), ali koeficijenti propagacije su kompleksniji. S obzirom da  $\mu$  sada ima dvije različite vrijednosti za sve zadane frekvencije ( $\pm \mu_1$  i  $\pm \mu_2$ ) postoje dva različita oblika slobodnog vibriranja. Prijenosne funkcije koje se koriste u jednadžbama (2.52) mnogo su složenije nego one u jednadžbi (2.23) međutim standardna metoda određivanja prijenosnih funkcija [63] može se primjeniti i za ove rubne uvjete.

## 2.2.2. Rješavanje pomoću metode virtualnog rada i metode propagacije valova

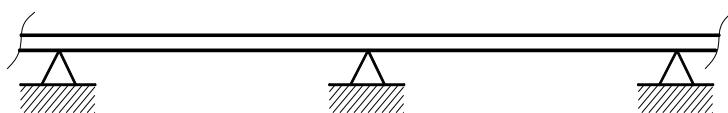
### 2.2.2.1. Opis metode propagacije valova

Za određivanje jednadžbi sustava koristi se metoda propagacije valova koju su razvili Mead i Pujara [26], u kojoj se odziv sustava opisuje pomoću prostornih harmonijskih valova koji su harmonici udaljenosti između oslonaca i čija suma predstavlja ukupni val, slika 2.10.



Slika 2.10 *Prikaz prostornih harmonijskih valova na beskonačnoj periodički oslonjenoj gredi*

Glavna prednost ove metode je što se poprečni pomaci opisuju pomoću grupe prostornih harmonijskih valova iz kojih se efekti pri radijaciji zvuka mogu relativno jednostavno izračunati. Navedena metoda koristi se zbog jednostavnijeg rješavanja za beskonačne periodički oslonjene panele koji se mogu modelirati gredom oslonjenom na jednakoj udaljene oslonce (slika 2.11.).



Slika 2.11 *Beskonačna periodički oslonjena greda na jednostavnim osloncima*

Slobodno vibracijsko harmonijsko gibanje neprigušene beskonačne grede na jednakoj udaljenim identičnim osloncima smatra se grupom prostornih harmonijskih valova koji putuju

u raznim smjerovima i s različitim brzinama. Valne duljine i valne brzine prostornih harmonijskih valova slijede iz imaginarnе komponente propagacijske konstante.

Vibracijska energija se širi na različite načine kroz razne strukture panela. Dok jednostavne strukture prenose vibracijsku energiju pomoću jednog tipa valnog gibanja (npr. fleksijskih valova), kod složenijih konstrukcija oni prenose vibracijsku energiju kao kombinaciju longitudinalnih, torzijskih i dvostravnih fleksijskih valova. Kad takvi različiti valovi dođu na prepreku oni međusobno djeluju i mijenjaju svoje oblike.

Greda na jednostavnim osloncima ima jednu propagacijsku konstantu za svaku frekvenciju i jednu definiranu slobodnu grupu prostornih harmonijskih valova. Vibracijska energija grupe u tom slučaju propagirati će samo u određenim frekvencijskim pojasevima. Izvan ovih frekvencijskih pojaseva, valovima opada amplituda po gredi i nema propagiranja. Greda na elastičnim osloncima ima dvije propagacijske konstante za svaku frekvenciju, i dvije odgovarajuće grupe prostornih harmonijskih valova.

### 2.2.2.2. Opis metode virtualnog rada

Ako se uzme u razmatranje čestica na koju djeluje  $n$  sila  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  [62] i prepostavi da je čestica izvršila mali pomak  $\delta\mathbf{r}$  iz jedne točke u drugu, veličina  $\delta\mathbf{r}$  je mogući mali pomak koji veze dozvoljavaju, te je zamišljen pa se zato naziva virtualnim pomakom stoga simbol  $\delta\mathbf{r}$  predstavlja varijaciju prvog reda.

Rad učinjen s jednom od  $n$  sila  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  na virtualnom pomaku  $\delta\mathbf{r}$  naziva se virtualni rad. Ukupan virtualni rad svih sila koje djeluju na česticu iznosi

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{f}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{f}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \dots + \mathbf{f}_n \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \dots + \mathbf{f}_n) \cdot \delta\mathbf{r}\end{aligned}\quad (2.58)$$

ili

$$\delta W = \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{r} \quad (2.59)$$

gdje je  $\mathbf{f}$  rezultantna sila tj. suma  $n$  sila  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ . Ukupni virtualni rad sila  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  jednak je virtualnom radu njihove rezultante  $\mathbf{f}$ .

Metoda virtualnog rada za česticu navodi da je ukupni rad svih sila koje djeluju na česticu jednak nuli za svaki virtualni pomak čestice ako je čestica u statičkoj ravnoteži, pa vrijedi izraz

$$\delta W = \mathbf{f}^T \delta\mathbf{r} = 0 \quad (2.60)$$

Ovaj uvjet je očito neophodan jer je rezultantna sila  $\mathbf{f}$  jednaka nuli za česticu u statičkoj ravnoteži po 2. Newton-ovom zakonu, pa slijedi da je ukupni virtualni rad  $\delta W$  jednak nuli. Navedeni uvjet je ujedno i dovoljan jer nulti virtualni rad,  $\delta W = 0$  ujedno i znači da je  $\mathbf{f}^T \delta \mathbf{r} = 0$ , što navodi na jednakost  $\mathbf{f} = 0$  za sve virtualne pomake  $\delta \mathbf{r}$ .

Na sličan način koncept virtualnog rada može se proširiti i na dinamički slučaj. Prema 2. Newton-ovom zakonu rezultanta svih sila koje djeluju na česticu jednaka je inercijalnoj sili čestice pa slijedi jednakost

$$\mathbf{f} - m_M \ddot{\mathbf{r}} = 0. \quad (2.61)$$

Za opisani slučaj kaže se da se čestica nalazi u dinamičkoj ravnoteži, pa vrijedi izraz

$$\{\mathbf{f} - m_M \ddot{\mathbf{r}}\}^T \delta \mathbf{r} = 0 \quad (2.62)$$

Princip virtualnog rada za česticu koja se nalazi u dinamičkoj ravnoteži glasi: ukoliko je čestica u dinamičkoj ravnoteži, ukupan virtualni rad svih sila koje djeluju na česticu jednak je virtualnom radu kojeg učini inercijalna sila za svaki virtualni pomak materijalne čestice pa je ukupan virtualni rad jednak nuli.

### 2.2.2.3. Izračun propagacijskih konstanti

Rješenje za diferencijalnu jednadžbu slobodnog gibanja periodički oslonjene grede (2.11) može se izraziti kao red prostornih harmonijskih valova [26], s obzirom da se zbog periodične prirode sustava pretpostavlja da će i odziv sustava biti periodičan pa izraz za poprečne pomake perioda grede glasi:

$$w(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-i[(\mu+2n\pi)/L]x} e^{i\omega t} \quad (2.63)$$

gdje je  $w(x, t)$  gibanje grede, koeficijenti  $A_n$  su amplitude oblika vibriranja grede,  $L$  je udaljenost između oslonaca i  $\mu$  je karakteristična propagacijska konstanta.

Prepostavljena periodičnost odziva unešena je u rješenje tj. jednadžbu (2.63) sa sumom po članu  $n$  pa je strukturni val definiran kao grupa prostornih harmonijskih valova označenih s indeksom  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ , za naprijed i nazad usmjerene valove, koji predstavljaju refleksije od oslonaca. Svaki od prostornih harmonijskih valova zasebno ne zadovoljava rubne uvjete ali njihova suma da.

Princip virtualnog rada se primjenjuje na slobodno gibanje na način da se definiraju sile koje djeluju na gredu tj. dobije se jednadžba gibanja grede (2.13) koja se može napisati i u obliku

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - m_p \omega^2 w = 0 \quad (2.64)$$

gdje je  $D=EI$  fleksijska krutost,  $I$  moment inercije površine presjeka grede,  $E$  Young-ov modul elastičnosti materijala grede u vakumu a  $m_g=A_p\rho$  specifična masa grede,  $A_p$  površina poprečnog presjeka i  $\rho$  gustoća materijala grede. Ukoliko se beskonačna greda koristi za modeliranje beskonačnog panela koji je konačan u poprečnoj ravnini u nazivnik izraza (2.10) dodaje se  $(1-\nu^2)$  gdje je  $\nu$  Poissonov koeficijent. Ukoliko je potrebno, strukturno prigušenje u gredi može se uključiti definirajući fleksijsku krutost izrazom

$$D = EI(1+i\eta) \quad (2.65)$$

gdje je  $\eta$  faktor strukturnog prigušenja u materijalu grede.

Sile iz izraza za jednadžbu gibanja grede (2.64) zajedno s elastičnim silama u osloncima ne smiju činiti virtualni rad pri postojanju virtualnog pomaka

$$\delta w = \delta A_m e^{-i[(\mu+2m\pi)/L]x - \omega t} \quad (2.66).$$

Nakon definicije virtualnog pomaka pomoću reda prostornih harmonijskih valova u obliku (2.63) princip virtualnog rada vodi do niza jednadžbi iz kojih se mogu izračunati koeficijenti  $A_n$ . S obzirom da je struktura prostorno periodična, u izračun je potrebno uzeti u obzir virtualni rad sila na jednom periodu grede i osloncima. Kao što je uobičajeno u kompleksnoj algebri za izračun virtualnog rada koristi se konjugirana kompleksna vrijednost virtualnog pomaka

$$\delta w^* = \delta A_m^* e^{+i[(\mu+2m\pi)/L]x}$$

Virtualni rad sila u gredi može se prikazati ovim izrazom:

$$\delta \Pi_p = \int_{x=0}^L \left( D \frac{d^4 w}{dx^4} - m_g \omega^2 w \right) \delta w^* \quad (2.67)$$

nakon uvrštavanja jednadžbe (2.63) u jednadžbu (2.67), virtualni rad grede se izračunava izrazom

$$\begin{aligned} \delta \Pi_p = \delta A_m^* & \left\{ \int_0^L D \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\mu + 2n\pi}{L} \right)^4 A_n e^{-i[(\mu+2n\pi)/L]x} e^{i[(\mu+2m\pi)/L]x} dx \right. \\ & \left. - \int_0^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_g \omega^2 A_n e^{-i[(\mu+2n\pi)/L]x} e^{i[(\mu+2m\pi)/L]x} dx \right\} \end{aligned}$$

Virtualni rad poprečne opruge po jednom periodu grede jednak je

$$\delta\Pi_t = K_t(1+i\mu_t)w(0)\delta w^* = K_t(1+i\mu_t)w(0)\delta A_m^* = K_t(1+i\mu_t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta A_m^* \quad (2.68)$$

za  $x=0$ , tj. za prvi oslonac u ishodištu koordinatnog sustava.

Virtualni rad fleksijske opruge po jednom periodu grede jednak je

$$\begin{aligned} \delta\Pi_r &= K_r(1+i\mu_r)\frac{dw}{dx}\frac{d(\delta w^*)}{dx} \\ &= K_r(1+i\mu_r)w'(0)iA_m^*\frac{\mu+2m\pi}{L} \\ &= K_r(1+i\mu_r)\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(-1)\frac{\mu+2n\pi}{L}i\delta A_m^*\frac{\mu+2m\pi}{L} \\ &= K_r(1+i\mu_r)\delta A_m^*\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\frac{\mu+2n\pi}{L}\frac{\mu+2m\pi}{L} \end{aligned} \quad (2.69)$$

U izrazima za virtualni rad poprečne i fleksijske opruge koristi se i koeficijent prigušenja kroz imaginarnu krutost poprečne i fleksijske opruge [67].

Virtualni rad točkaste mase na koordinatama oslonca po jednom periodu grede je

$$\delta\Pi_M = -\omega^2 m_M w(0)\delta A_m^* = -\omega^2 m_M \delta A_m^* \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \quad (2.70)$$

Princip virtualnog rada zahtjeva da suma svih virtualnih radova bude jednaka nuli

$$\delta\Pi_p + \delta\Pi_t + \delta\Pi_r + \delta\Pi_M = 0 \quad (2.71)$$

Nakon uvrštavanja virtualnih radova u izraz (2.71) dobija se izraz

$$\begin{aligned} &\left[ D\left(\frac{\mu+2m\pi}{L}\right)^4 - m_g\omega^2 \right] A_m + \left( \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n + \frac{K_r}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left( \frac{\mu+2n\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu+2m\pi}{L} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

Postupak određivanja koeficijenata  $A_n$  i propagacijskih konstanti uključuje definiranje izraza (2.72) u matričnom obliku i rješavanje determinante matrice i matričnog izraza (2.73). U ovom radu opisati će se rješenje sa 5 prostornih harmonijskih valova kad su indeksi pojedinih prostornih harmonijskih valova u jednadžbi (2.72)  $n$  i  $m=-2, -1, 0, 1, 2$ , tj. njihove amplitude  $A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2$ . Matrice imaju ovaj oblik

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' & E' \\ F' & G' & H' & I' & \\ J' & K' & L' & & \\ M' & N' & & & \\ \text{simetrično} & & O' & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{VR}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{-2} \\ A_{-1} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = [0] \quad (2.73)$$

dok se članovi matrice  $\mathbf{M}_{VR}$  definiraju po ovim izrazima

$$\begin{aligned}
 A' &= \left[ D \left( \frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right)^2 \\
 B' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right) \\
 C' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right) \\
 D' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right) \\
 E' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right) \\
 F' &= \left[ D \left( \frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right)^2 \\
 G' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right) \\
 H' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right) \\
 I' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right) \\
 J' &= \left[ D \left( \frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)^2 \\
 K' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right) \\
 L' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M' &= \left[ D \left( \frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)^2 \\
 N' &= \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right) \\
 O' &= \left[ D \left( \frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)^2
 \end{aligned}$$

Determinanta matrice  $\mathbf{M}_{VR}$  mora biti jednaka nuli za netrivijalna rješenja

$$\det \begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' & E' \\ F' & G' & H' & I' & \\ J' & K' & L' & & \\ M' & N' & & & \\ \text{simetrično} & & & & O' \end{bmatrix} = 0 \quad (2.74)$$

iz čega slijede vrijednosti propagacijskih konstanti. Dobivena rješenja propagacijskih konstanti mogu se smatrati točnim ukoliko ona konvergiraju. Iz navedenog slijedi potreba korištenja dovoljnog broja prostornih harmonijskih valova. Usporedba zahtjeva za konvergencijom propagacijske konstante i zahtjevom za konvergencijom vrijednosti zvučnog transmisijskog gubitka koji je referentan u članku [32] komentirana je u odlomku 3.3.1. s analizom rezultata.

Nakon definiranja propagacijskih konstanti slijedi izračun koeficijenata  $A_n$  (amplituda prostornih harmonijskih valova) iz izraza (2.73).

#### 2.2.2.4. Odredivanje amplituda prostornih harmonijskih valova

Amplitude prostornih harmonijskih valova moguće je izračunati na dva načina i to razvojem funkcije oblika u Fourier-ove redove prostornih harmonijskih valova i direktnim rješavanjem matrične jednadžbe slobodnih vibracija.

#### 2.2.2.4.1. Rješavanje matrične jednadžbe slobodnih vibracija

Amplitude prostornih harmonijskih valova  $A_n$  odrede se rješavanjem matrične jednadžbe (2.73) nakon što su određene propagacijske konstante i time svi članovi matrice  $\mathbf{M}_{VR}$ .

#### 2.2.2.4.2. Razvoj funkcije oblika u Fourier-ove redove

Ukoliko je funkcija oblika određena pomoću izraza (2.48) i (2.44) amplitude prostornih harmonijskih valova mogu se izračunati pomoću Fourier-ovog razvoja u red uz preinaku u eksponentu  $(\mu + 2n\pi)\frac{x}{L}$ . U Fourier-ov izraz uvrštava se propagacijska konstanta  $\mu$  s primarnom vrijednosti i ostali prostorni harmonijski valovi te se iz izraza:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i(\mu+2n\pi)\frac{x}{L}} \quad (2.75)$$

računaju koeficijenti Fourier-ovog razvoja u red

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{i(\mu+2n\pi)\frac{x}{L}} dx \quad (2.76)$$

Standardna Fourierova analiza po kojoj krajnji oblik vibriranja ima ovaj oblik

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n e^{-inx}$$

i po kojoj se rješenja za koeficijente  $H_n$  odrede iz izraza

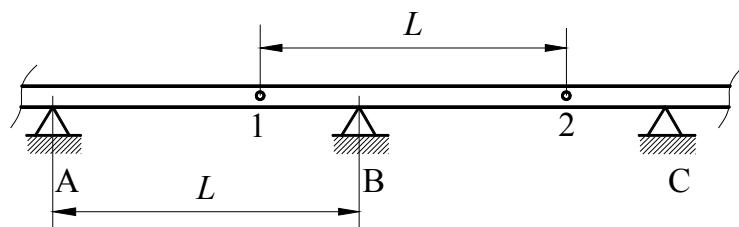
$$H_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{inx} dx$$

nije primjenjiva za slučaj periodički oslonjene beskonačne grede kod koje su valne duljine prostornih harmonijskih valova djelitelji osnovne valne duljine. Pri njezinoj primjeni dobivaju se koeficijenti  $H_n$  jednakim nuli. U odlomku 3.3.5. izračunate su funkcije oblika i uspoređeni njihovi oblici.

### 2.2.2.5. Smjer, amplituda i fazna brzina prostornih harmonijskih valova

#### 2.2.2.5.1. Vektorski opis gibanja valova u gredi na jednostavnim osloncima

Neka vektor  $\mathbf{w}_1$  predstavlja harmonijski vektor pomaka točke  $F$  u jednom periodu grede (slika 2.12), a vektor  $\mathbf{w}_2$  harmonijski vektor pomaka točke  $G$  u susjednom periodu grede uz uvjet da su točke  $F$  i  $G$  na udaljenosti  $L$  jednakoj udaljenosti oslonaca.

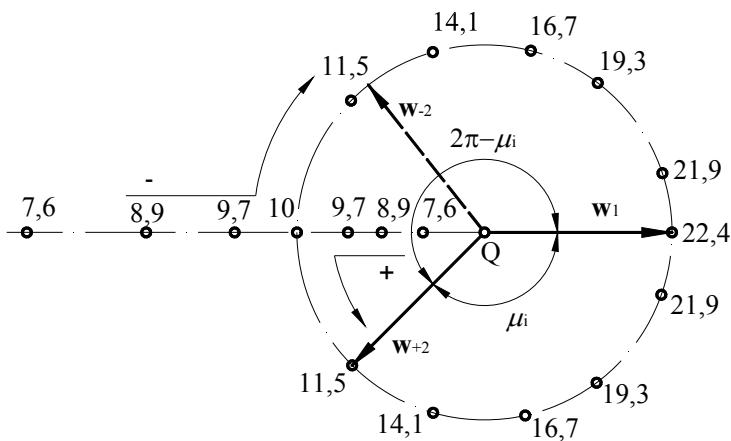


Slika 2.12 Beskonačna greda periodički oslonjena na jednostavne oslonce

Pomaci  $\mathbf{w}_1$  i  $\mathbf{w}_2$  povezani su jednakim zakretima (2.29) ili momentima (2.30) pa vrijedi

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 e^{\mu} \quad (2.77)$$

Na slici 2.13 prikazani su vektori  $\mathbf{w}_1$  i  $\mathbf{w}_2$  kao dvije dužine koje započinju u točki Q.



Slika 2.13 Prikaz vektora pomaka  $\mathbf{w}_1$  i  $\mathbf{w}_2$  u susjednim periodima grede

$\mathbf{w}_1$  je referentni vektor koji ima istu amplitudu i smjer za sve frekvencije. Smisao je u uspoređivanju položaja vektora  $\mathbf{w}_2$  u odnosu na vektor  $\mathbf{w}_1$  na zadanoj frekvenciji. Vektor  $\mathbf{w}_1$

se mijenja kako se mijenja propagacijska konstanta  $\mu$ . Različite veličine po kružnici definiraju položaj vrha vektora  $\mathbf{w}_2$  za zadani parametar frekvencije koja se izračunava s izrazom (2.35).

Ukoliko vrijedi da je parametar frekvencije manji od parametra frekvencije na 1. graničnoj frekvenciji,  $\mu_1 = -\pi$ , vektor  $\mathbf{w}_2$  je  $180^\circ$  izvan faze u odnosu na vektor  $\mathbf{w}_1$ . Na slici 2.13 vidljive su dvije točke koje odgovaraju vrijednosti parametra frekvencije 9,7 koji je manji od parametra frekvencije donje granične frekvencije prvog propagacijskog pojasa ( $\Omega_{dg1pp} = 9,7$ ) od kojih točka unutar kruga predstavlja vektor  $\mathbf{w}_2$  manji od vektora  $\mathbf{w}_1$ , tj. val čija se amplituda smanjuje pri gibanju u pozitivnom smjeru grede dok točka izvan kruga predstavlja vektor  $\mathbf{w}_2$  veći od vektora  $\mathbf{w}_1$  tj. val čija se amplituda smanjuje pri gibanju u negativnom smjeru. Opisane dvije točke dobivene su koristeći  $-\mu$  i  $+\mu$  po jednadžbi (2.77).

S obzirom da negativna vrijednost propagacijske konstante odgovara valu koji se giba u pozitivnom smjeru, odgovarajući vektor  $\mathbf{w}_2$  se označava  $\mathbf{w}_{2+}$ . Val koji se giba u negativnom smjeru i odgovara pozitivnoj propagacijskoj konstanti se označava s  $\mathbf{w}_{2-}$ .

Za vrijednost parametra frekvencije 10  $\mathbf{w}_2$  je jednak  $\mathbf{w}_1$  i ostaje jednak do parametra frekvencije 22,4 kroz propagacijski frekvencijski pojas. Međutim kako imaginarna komponenta propagacijske konstante raste  $\mathbf{w}_2$  rotira na način kako je označeno na slici 2.13. Pozitivno usmjeren val tj. vektor  $\mathbf{w}_{2+}$  rotira po donjem polukrugu i postaje konidentan s  $\mathbf{w}_1$  na parametru frekvencije 22,4, dok negativno usmjeren val, tj. vektor  $\mathbf{w}_{2-}$  rotira po gornjem polukrugu i isto postaje koincidentan s  $\mathbf{w}_1$  na parametru frekvencije 22,4.

Ako se promatra vektor  $\mathbf{w}_{2+}$  na parametru frekvencije  $\Omega = 11,5$  vidljivo je da on kasni za  $\mathbf{w}_1$  s faznim kutem od  $\mu_i$ . Međutim, po uobičajenoj terminologiji koja se koristi kod opisivanja faznih kuteva navedeno kašnjenje može se prikazati i kao kašnjenje u iznosu  $\mu_i + 2\pi, \mu_i + 4\pi$  tj.  $\mu_i + 2n\pi$ . S druge strane navedeni vektor može se smatrati vektorom koji prethodi referentni vektor  $\mathbf{w}_1$  za fazni kut  $2\pi - \mu_i, 4\pi - \mu_i$  tj.  $2n\pi - \mu_i$ .

U stvari  $\mathbf{w}_2$  se mora smatrati sumom beskonačno mnogo prostornih harmonijskih valova, ili komponenata, od kojih neke kasne za vektorom  $\mathbf{w}_1$  za  $\mu_i + 2n\pi$  ( $n = 0 \div \infty$ ), i drugih koji prethode ispred referentnog vektora  $\mathbf{w}_1$  za  $2n\pi - \mu_i$  ( $n = 1 \div \infty$ ). Vektori koji kasne predstavljaju prostorne harmonijske valove koji putuju u pozitivnom smjeru, dok vektori koji prethode predstavljaju prostorne harmonijske valove koji putuju u negativnom smjeru. Sve ove komponente zajedno čine ukupni pozitivno usmjereni val koji se predstavlja s vektorom  $\mathbf{w}_{2+}$ .

Za vektore koji prethode za  $2n\pi - \mu_i$  može se reći da kasne za  $-(2n\pi - \mu_i) = \mu_i - 2n\pi$  pa zbog jednostavnosti matematičkog prikaza (a ne zbog boljeg fizikalnog razumjevanja) može se reći da svi vektori kasne za  $\mathbf{w}_1$  za  $\mu_i + 2n\pi$ , gdje  $n$  ima u rasponu od  $\pm\infty$ .

Sada je moguće jasno opisati značenje dijelova krivulje na slici 2.7. Segment  $AB$  odgovara pozitivno usmjerenoj valnoj komponenti od vala  $\mathbf{w}_{2+}$  koja je definirana s faznim kašnjenjem  $\mu_i$ . Segment  $CD$  odgovara pozitivno usmjerenoj valnoj komponenti s faznim kašnjenjem  $\mu_i + 2\pi$ . S druge strane, segment  $B'C'$  odgovara negativno usmjerenoj valnoj komponenti  $\mathbf{w}_{2+}$  koja prethodi za  $2\pi - \mu_i$ . Crtkani dijelovi dijagrama odgovaraju raznim valnim komponentama (prostornim harmonijskim valovima) vektora  $\mathbf{w}_{2+}$ . Rezultantni vektor je usmjeren u negativnom smjeru, i ima negativno usmjereni valni komponente kojima odgovara segment  $AB'$ , ali i pozitivno usmjereni valni komponente kojima odgovaraju segmenti  $BC, DE$ , itd.

#### 2.2.2.5.2. Ukupni val kao grupa prostornih harmonijskih valova

Ukoliko se promatra pozitivno usmjereni prostorni harmonijski val koji ima fazno kašnjenje  $\mu_i + 2n\pi$ , njegova funkcija oblika glasi

$$w_n(x) = A_n e^{i(\omega t - (\mu_i + 2n\pi)x/L)} \quad (2.78)$$

Ukoliko se navedeni izraz želi definirati s faznom brzinom prostornog harmonijskog vala potrebno je prvo definirati njezinu veličinu. Fazna brzina vala definira kojom brzinom se vala širi prostorom te se ona definira iz valne duljine vala  $\lambda$  i vremenskog perioda vala  $T$ :

$$c_n = \frac{\lambda}{T} \quad (2.79).$$

S obzirom da kružna frekvencija  $\omega$  slijedi iz izraza

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.80)$$

i da broj vala  $k$  slijedi iz izraza

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.81)$$

slijedi da se fazna brzina može dobiti i iz izraza

$$c_n = \frac{\omega}{k} \quad (2.82).$$

Izraz koji povezuje broj vala i imaginarnu propagacijsku konstantu glasi

$$k = \frac{\mu_i + 2n\pi}{L} \quad (2.83)$$

pa krajnji izraz za faznu brzinu ima oblik

$$c_n = \frac{\omega L}{\mu_i + 2n\pi} \quad (2.84)$$

Nakon uvrštavanja izraza (2.84) u izraz (2.78) slijedi novi izraz za funkciju oblika prostornog harmonijskog vala

$$w_n(x) = A_n e^{i(c_n t - x)(\mu_i + 2n\pi)/L} \quad (2.85).$$

Val opisan izrazom (2.85) ne zadovoljava rubne uvjete na osloncima perioda grede. Međutim slobodno gibanje pozitivno usmjereno vala se može smatrati sumom komponenata vala sa svim mogućim kašnjenjima  $\mu_i + 2n\pi$  ( $n = 1 \div \pm\infty$ ) i kada one djeluju zajedno u odgovarajućim odnosima rubni uvjeti će biti zadovoljeni.

Ukupna funkcija oblika vala koji putuje u pozitivnom smjeru  $w_+(x)$  izračunava se iz izraza

$$w_+(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{i(\omega t - (\mu_i + 2n\pi)x/L)} \quad (2.86).$$

Negativna vrijednost veličine  $n$  odgovara negativnoj faznoj brzini koja odgovara komponentama vala koje putuju u negativnom smjeru. Ukupna funkcija oblika vala koji putuje u negativnom smjeru  $w_-(x)$  može se definirati sa sličnim izrazom

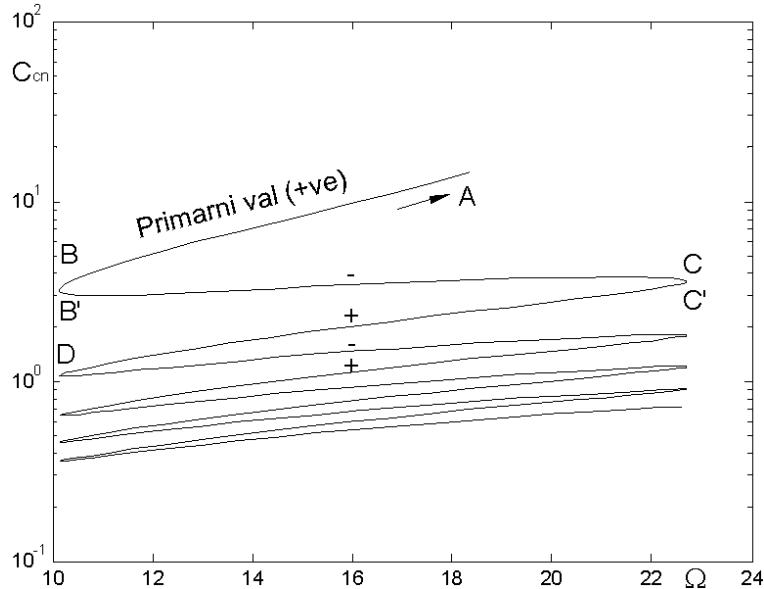
$$w_-(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{n-} e^{i(\omega t + (\mu_i + 2n\pi)x/L)} \quad (2.87).$$

koji isto ima komponente koji se gibaju u pozitivnom i negativnom smjeru.

Slobodni val sastoji se od valne grupe prostornih harmonijskih valova, u kojoj svaka sinusna komponenta vala ima različite fazne brzine. Neke komponente putuju u pozitivnom a neke u negativnom smjeru. Postojanje negativno usmjerenih valnih komponenti u pozitivno usmjerenoj grupi valova može se objasniti s refleksijama od oslonaca, koje pretvaraju pozitivan smjer gibanja energije u negativan smjer.

Na slici 2.14 prikazane su fazne brzine prostornih harmonijskih valova zamišljenog pozitivno usmjerenog vala te se na istoj koristi veličina parametar fazne brzine  $C_n$  koji se izračunava po izrazu:

$$C_{cn} = \sqrt{\frac{m_g}{EI}} L c_n = \frac{\Omega}{\mu_i + 2n\pi} \quad (2.88).$$



Slika 2.14 Vrijednosti faznih brzina komponenta pozitivno usmjerenog vala u prvom propagacijskom frekvencijskom pojasu

Krivilja na slici 2.14 sastoje se od segmenata koji odgovaraju segmentima na slici 2.7 uz nadopunu da su u cilju prikaza negativno i pozitivno usmjerenih faznih brzina na istom logaritamskom dijagramu uzete apsolutne vrijednosti negativnih faznih brzina te se odgovarajući segmenti točno nadovezuju između pozitivnih segmenata. Segmenti koji definiraju negativno usmjereni komponenti vala označeni su s "-" na dijagramu.

Iz izraza (2.81) i (2.83) slijedi izraz za valnu duljinu jedne komponente vala:

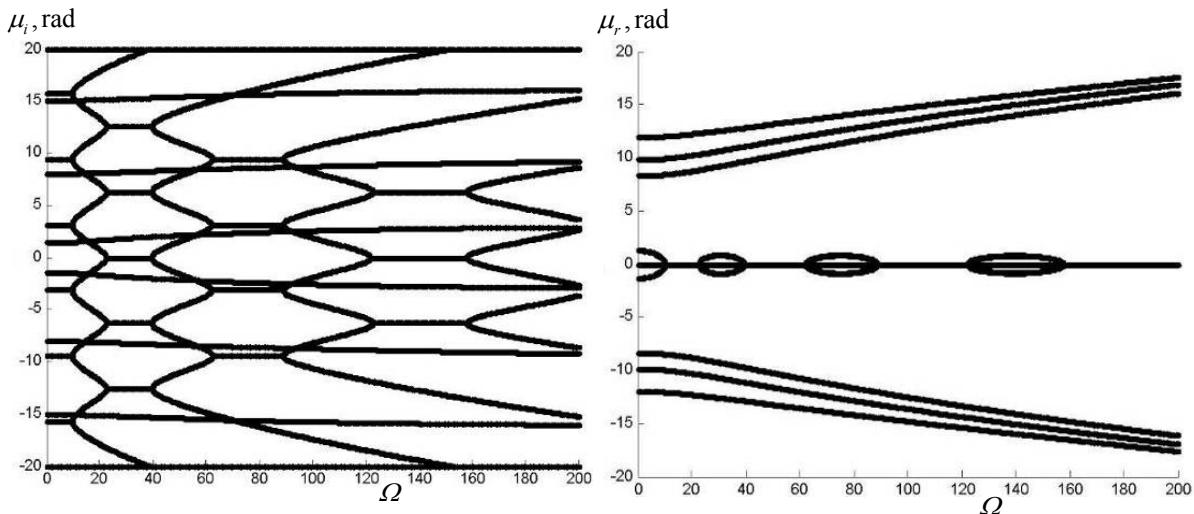
$$\lambda_n = \frac{L}{n + \frac{\mu_i}{2\pi}} \quad (2.89)$$

dok se tzv. pseudo-valna duljina , ili valna duljina prostornog harmonijskog vala za kojeg je  $n=0$  dobija iz izraza

$$\lambda_0 = \frac{2\pi L}{\mu_i} \quad (2.90).$$

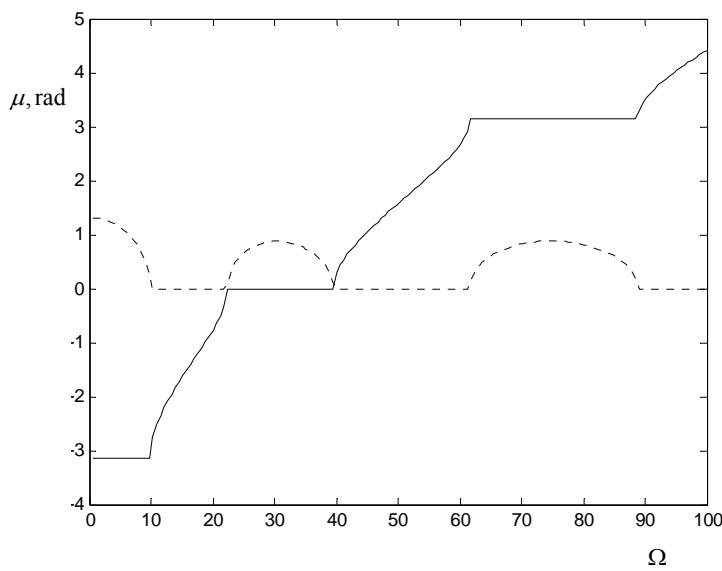
Potrebno je naglasiti da valne duljine komponenata vala ne moraju biti točni višekratnik ili djelitelj udaljenosti između oslonaca  $L$ , niti je jedna valna duljina višekratnik od druge. Navedeno se jedino događa kad je  $\mu_i=0, 2\pi, 4\pi$ , itd.

Na slici 2.15 prikazane su sve vrijednosti propagacijskih konstanti koje zadovoljavaju izraz (2.74) po metodi propagirajućih valova.



Slika 2.15 *Realne i imaginarnе vrijednosti propagacijskih konstanti (metoda propagirajućih valova)*

S obzirom da u 2. propagacijskom pojasu prostorni harmonijski val ima unutar jednog perioda grede jedan brijeđ više nego u 1. propagacijskom pojasu i da se navedeno ponavlja u svim propagacijskim pojasevima uvodi se tzv. primarna imaginarna propagacijska konstanta čije su vrijednosti prikazane na slici 2.16 .



Slika 2.16 *Vrijednosti primarne imaginarne ..... i realne ..... komponente propagacijske konstante u funkciji parametra frekvencije*

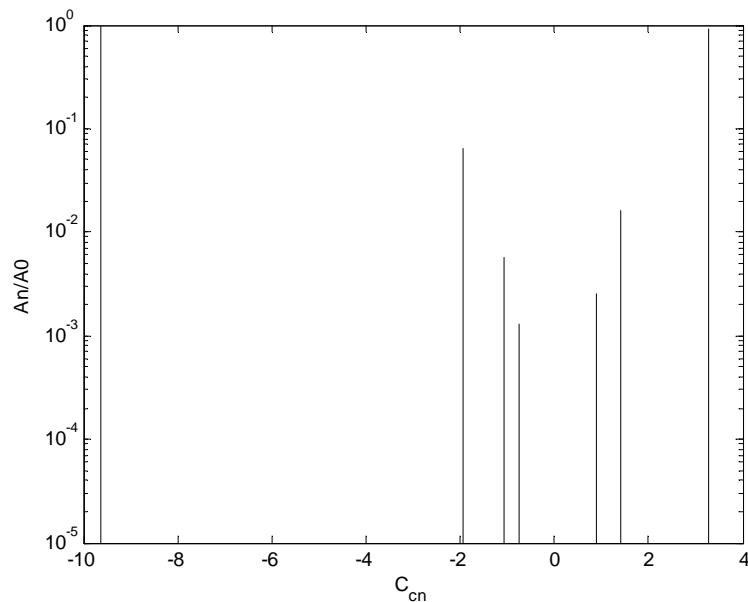
Na slici 2.16 prikazane su vrijednosti primarne imaginarne i realne komponente propagacijske konstante pri rastu frekvencije.

Iz dijagrama je vidljivo da u svakom sljedećem propagacijskom pojasu dolazi do promjene faznog kuta za  $+\pi$  što odgovara povećanju broja brijegeva za jedan unutar jednog perioda grede. Na frekvencijama koje se nalaze između frekvencijskih propagacijskih pojaseva nema propagacije valova tj. nastaju stojni valovi pa se ista mogu nazivati stojnim pojasmima. Negativna vrijednost propagacijske konstante  $\mu_i = -\pi$  vrijedi za prvi stojni frekvencijski pojas. U prvom propagacijskom frekvencijskom pojasu imaginarna propagacijska konstanta mijenja svoju vrijednost od  $-\pi$  do 0, te ostaje na vrijednosti 0 unutar drugog stojnog frekvencijskog pojasa. U drugom propagacijskom frekvencijskom pojasu imaginarna propagacijska konstanta raste od 0 do  $\pi$ , itd.

Vrijednosti  $\mu_i$  koje su prikazane na slici 2.16 nazivaju se primarnim imaginarnim vrijednostima dok su sve imaginarne vrijednosti (primarne i sekundarne) prikazane na slici 2.7.

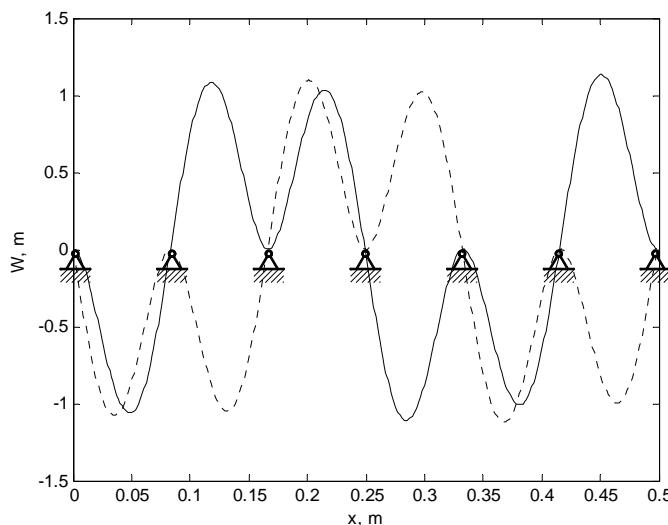
#### 2.2.2.5.3. Dijagram prikaza grupe prostornih harmonijskih valova

Na slici 2.17 prikazani su omjeri amplituda prostornih harmonijskih valova  $\frac{|A_n|}{|A_0|}$  koji čine u sumi ukupni val koji se giba u pozitivnom smjeru s parametrom frekvencije  $\Omega=15,5$  pri kojem je imaginarna propagacijska konstanta jednaka  $\mu_i = \frac{\pi}{2}$ .



Slika 2.17 *Omjer amplituda slobodne grupe prostornih harmonijskih valova ( $\Omega=15,5$ )*

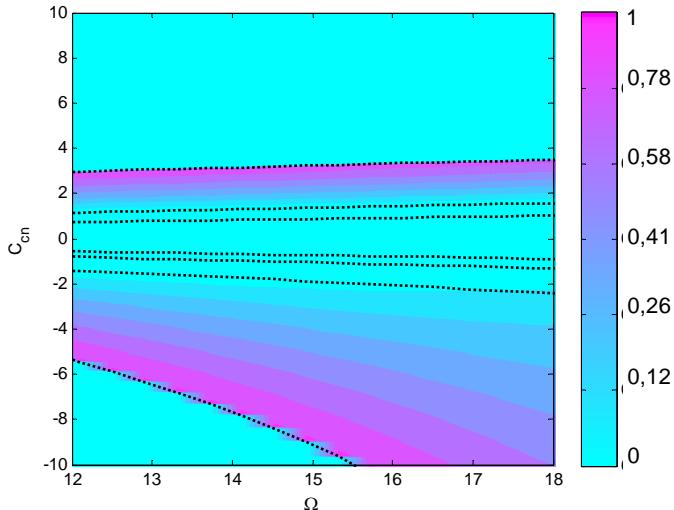
Omjer amplituda prostornih harmonijskih valova nalazi se na ordinati dijagrama a na apscisi nalaze se amplitude bezdimenzijske fazne brzine. Plus ili minus znak na dijagramu označavaju smjer prostornog harmonijskog vala (pozitivan ili negativan) grupe valova koja se zajedno giba u pozitivnom smjeru. Na slici 2.18 je prikazan trenutni oblik vibriranja na tom parametru frekvencije.



Slika 2.18 *Oblik vibriranja pri  $\Omega=15.5$ : realni oblik vibriranja \_\_\_\_\_ i imaginarna komponenta -----*

Pomaci u prvom periodu grede su cca. za  $90^\circ$  izvan faze u odnosu na drugi period grede. Navedeni oblik se ponavlja svaka 4 perioda grede iz čega slijedi da je temeljna valna duljina grupe valova  $4L$ . Valna duljina  $A_{-1}$  prostornog harmonijskog vala je  $4L/5$  kako je definirano s izrazom (2.89). Na slici 2.17 se može primjetiti da prostorni harmonijski valovi  $A_0$  i  $A_{-1}$  imaju najveće amplitude i time nose najveću energiju i najviše oblikuju krajnji val. Navedeni prostorni harmonijski valovi putuju u suprotnim smjerovima s različitim faznim brzinama. Druge amplitude prostornih harmonijskih valova su prilično manje (na ordinati je logaritamsko mjerilo) te je potrebno primjetiti da se prostorni harmonijski valovi sličnih amplituda pojavljuju u parovima ( $A_{+1}$  i  $A_{-2}$ ,  $A_{+2}$  i  $A_{-3}$ , itd.) od kojih pozitivno usmjerene komponente imaju nešto veću amplitudu.

Za prikaz grupe valova slobodnih vibracija periodički oslonjene beskonačne grede u zadanom frekvencijskom pojasu moguće je koristiti i dijagram na slici 2.19 na kojem se na apscisi nalazi frekvencija a na ordinati fazna brzina. Navedeni dijagram ima prednost u smislu da se na jednom dijagramu vide fazne brzine, i amplitude grupe valova na svim frekvencijama. U dijagramu se lako uoče valovi s povećanom amplitudom te ih se može povezati s granicama propagacijskih područja. Posebna prednost opisanog dijagraama je u usporedbi slobodnih i prisilnih vibracija koja slijedi u odlomku 3.3.6.



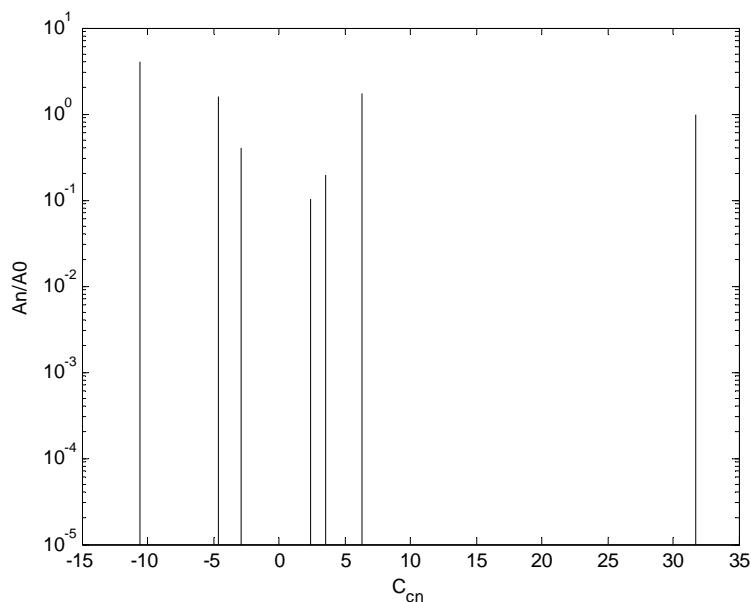
Slika 2.19 Amplitude i fazne brzine prostornih harmonijskih valova u zadanim frekvencijskim pojasu

Grupa slobodnih prostornih harmonijskih valova sa parametrom frekvencije  $\Omega=12.8$ , sastoji se od specifične grupe valova pa ju je potrebno detaljnije analizirati. Navedeni parametar frekvencije nalazi se na donjoj granici propagacijskog frekvencijskog pojasa na kojoj imaginarna propagacijska konstanta ima veličinu  $\mu_i = \pi$ . Fazna brzina  $A_0$  komponente iznosi  $\frac{\omega L}{\pi}$ , a fazna brzina  $A_{-1}$  komponente iznosi  $-\frac{\omega L}{\pi}$ , tj. radi se o faznim brzinama iste amplitude ali su valovi usmjereni u suprotnom smjeru što se vidi u predznaku fazne brzine. Isto se ponavlja i za druge parove prostornih harmonijskih valova ( $A_1$  i  $A_{-2}$ ,  $A_2$  i  $A_{-3}$ , itd.) pa slijedi da se ukupni val sastoji od grupe parova prostornih harmonijskih valova jednakih amplituda ali suprotnih smjerova, čije su valne duljine djelitelji dvostrukе udaljenosti između oslonaca ( $2L$ ,  $2L/3$ ,  $2L/5$ , itd.). Rezultatno gibanje je stojni val koji je prikazan na slici 2.5 b.

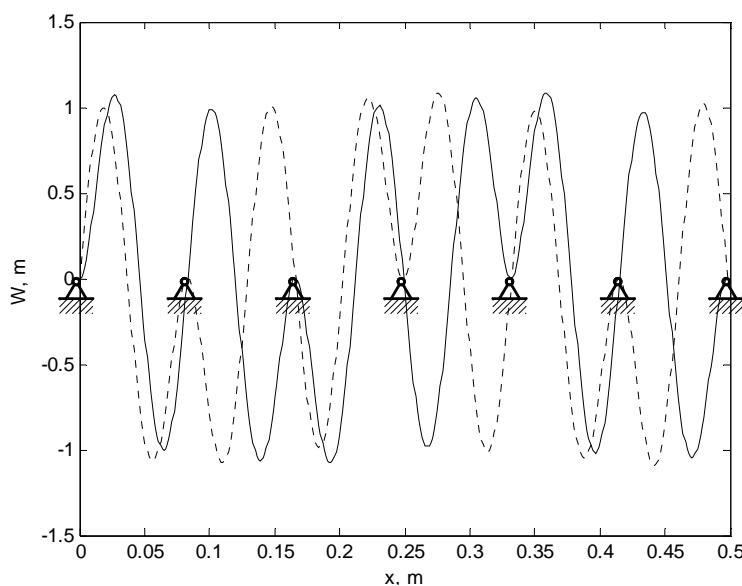
Grupa slobodnih valova na parametru frekvencije  $\Omega=22.4$  koja se nalazi na gornjoj granici propagacijskog frekvencijskog pojasa sastoji se također od specifične grupe prostornih harmonijskih valova pa ju je potrebno detaljnije analizirati. S obzirom da je imaginarna propagacijska konstanta jednaka 0 valna duljina temeljnog vala jednaka je  $\infty$  i takvo gibanje odgovara poprečnom pomaku krutog tijela cijele grede. Ostali prostorni harmonijski valovi imaju valne duljine  $L$ ,  $L/2$ ,  $L/3$ , itd. I u ovom slučaju postoje parovi prostornih harmonijskih valova jednakih amplituda i valnih duljina koji putuju u suprotnim smjerovima s jednakim faznim brzinama. Slijedi da se opet radi o stojnim valovima te je oblik vibriranja svakog perioda grede identičan prvom normalnom obliku vibriranja jednostrukе grede uklještene na oba kraja. Amplituda prostornog harmonijskog vala  $A_0$  (poprečno gibanje grede kao krutog tijela) proporcionalna je pomaku oblika vibriranja usrednjeno u jednom periodu grede. Njezino gibanje se pretvara u nulti pomak u osloncima nakon zbrajanja svih prostornih harmonijskih valova.

### 2.2.2.5.4. Analiza prostornog harmonijskog vala s najvećom amplitudom

U prvom propagacijskom frekvencijskom pojasu prostorni harmonijski val s najvećom amplitudom je uvjek onaj s najvećom faznom brzinom. Navedeno se mijenja u drugom propagacijskom frekvencijskom pojasu gdje je za primjer uzet val s parametrom frekvencije  $\Omega=50.2$  kod kojeg je  $\mu_i=+\pi/2$  (slika 2.20 ) dok je na slici 2.21 prikazan oblik vibriranja takvog vala.



Slika 2.20 Omjer amplituda prostornih harmonijskih valova slobodne valne grupe ( $\Omega=50.2$ )



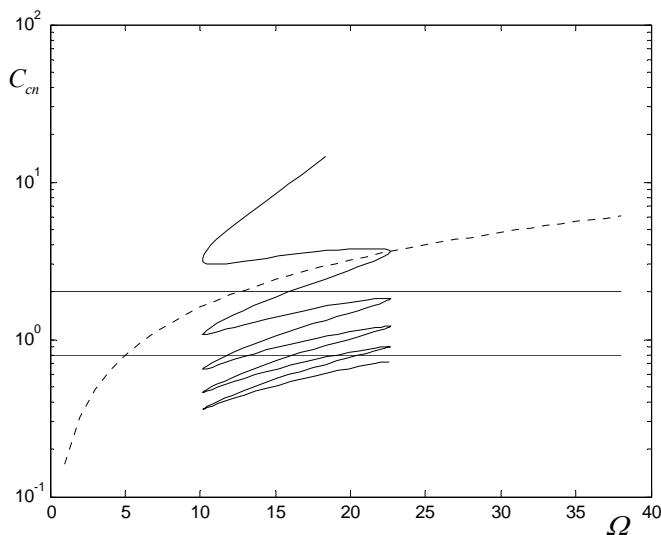
Slika 2.21 Oblik vibriranja na  $\Omega=50.2$

Očito je da drugi prostorni harmonijski val po faznoj brzini ima najveću amplitudu tako da taj val nosi i najveću energiju. Navedeno se događa kod svih frekvencija u navedenom propagacijskom frekventnom spektru.

U trećem propagacijskom frekventnom spektru treći prostorni harmonijski val po faznoj brzini ima najveću amplitudu. Slijedi opće pravilo da u  $n$ -tom propagacijskom frekvencijskom pojasu  $n$ -ti prostorni harmonijski val po faznoj brzini ima najveću amplitudu. Navedeno slijedi iz pripadne vrijednosti imaginarno-propagacijske konstante  $\pm\mu_i$ , i nazivati će se primarni val valne grupe.

#### 2.2.2.5.5. Efekt koincidencije

Ukoliko je fazna brzina prisile na zadanoj frekvenciji jednaka faznoj brzini prostornog harmonijskog vala  $n$  na istoj frekvenciji (horizontalna linija na dijagramu 2.14) dolazi do efekta koincidencije [74]. Efekt koincidencije može se pojaviti s bilo kojim valom iz grupe slobodnih valova, međutim, iz analize u prethodnom odlomku slijedi da se najveći efekt koincidencije tj. najveći odziv pri postojanju efekta koincidencije pojavljuje kad primarni prostorni harmonijski val grupe sudjeluje u koincidenciji [33]. Ove frekvencije su puno niže nego frekvencije na kojima dolazi do koincidencije kod neoslonjenih greda ili ploča. Na slici 2.22 su prikazane fazne brzine prostornih harmonijskih valova beskonačne neoslonjene i periodički oslonjene grede.



Slika 2.22 Fazna brzina slobodnih valova u neoslonjenoj gredi ----- i u periodički oslonjenoj gredi \_\_\_\_\_ (horizontalne linije predstavljaju faznu brzinu prisile  $C_{cn1}=0,8$  i  $C_{cn2}=2$ )

Uz pretpostavku da fazna brzina pobude odgovara nedimenzionalnom parametru fazne brzine  $C_{cn}=2$  akustička koincidencija bi se u neoslonjenom panelu pojavila na parametru frekvencije  $\Omega=12,5$ , a u periodički oslonjenom panelu na parametru frekvencije  $\Omega=16$ .

S druge strane na niskoj faznoj brzini prisilnog vala ( $C_{cn}=0,8$ ) moguća je koincidencija s šest različita prostorna harmonijska vala valne grupe (horizontalni pravac se siječe s krivuljom raznih brzina slobodnog odziva u šest točaka). Tri od navedena šest prostorna harmonijska vala pripadaju grupi pozitivno usmjerenih prostornih harmonijskih valova ( $\Omega_1=12$ ,  $\Omega_2=15,5$  i  $\Omega_3=18,5$ ) a tri grupi negativno usmjerenih valova ( $\Omega_4=13$ ,  $\Omega_5=19$  i  $\Omega_6=21$ ). Ovi valovi su samo slabo pobuđeni pod zadanim uvjetima s obzirom da se ne radi o primarnom valu, međutim nepovoljne velike promjene se vide u odzivu.

Uz opisan glavni efekt koincidencije pojavljuje se i dodatno pobudena koincidencija ostalih prostornih harmonijskih valova iz grupe valova jer je događaj glavne koincidencije unio u sustav energiju koja se manifestira u pojavljivanju povećanih amplituda vibracija ostalih prostornih harmonijskih valova u grupi. Očito je da amplituda postojećeg fleksijskog vala u panelu raste ukoliko je frekvencija pobude bliska frekvenciji na kojoj postoji povećan slobodni odziv ali isto tako raste i amplituda prostornih harmonijskih valova koji su dio slobodnog odziva s time da se frekvencije takvog odziva pomiču od frekvencija slobodnog odziva pri rastu upadnog kuta.

Slijedi da se faznom brzinom prisile jednog iznosa može pobuditi prostorni harmonijski val odziva koji ima faznu brzinu drugog iznosa, veću ili manju od fazne brzine prisile što negativno utječe na zvučne transmisijske gubitke kroz takve pregrade.

Fazna brzina prisilnog prostornog harmonijskog vala može biti puno veća nego fazna brzina slobodnog fleksijskog vala u neoslonjenoj gredi na istoj frekvenciji. Navedeno omogućuje da se efekt koincidencije može dogoditi na puno nižoj frekvenciji kod oslonjene grede nego kod neoslonjene grede.

Sporiji val može biti pobuđen prisilnim poljem jednakom fazne brzine ali isti će ujedno pobuditi brže prostorne harmonijske valove u njegovoj valnoj grupi. Iz toga je moguće izvesti zaključak da prisilna akustička polja faznih brzina nižih od faznih brzina slobodnih valova u strukturi mogu pobuditi prostorne harmonijske valove viših faznih brzina koji imaju veliku radijaciju zvuka što smanjuje zvučne transmisijske gubitke i time je nepovoljno.

### 2.3. Akustički odziv beskonačnog nedeformabilnog panela na normalne ravninske valove

Kako je opisano u uvodu, jedna od osnovnih metoda za smanjenje transmisije zvuka kroz panel je postizanje refleksije od iste pomoću unosa velike promjene u akustičkoj impedanci na putu transmisije.

Akustička impedanca  $Z_a$  (ili zvučna impedanca) je parametar koji ovisi o frekvenciji  $f$  i definira se izrazom

$$Z_a = \frac{p_a}{vA_a} \quad (2.91)$$

gdje je  $p_a$  akustički tlak,  $v$  brzina čestice medija a  $A_a$  površina kroz koju akustički val frekvencije  $f$  prolazi i na koju je brzina čestice okomita.

Specifična akustička impedanca  $z$  je omjer akustičkog tlaka  $p_a$  i brzine čestice  $v$  na zadanoj frekvenciji

$$z = \frac{p_a}{v} = Z_a A_a \quad (2.92)$$

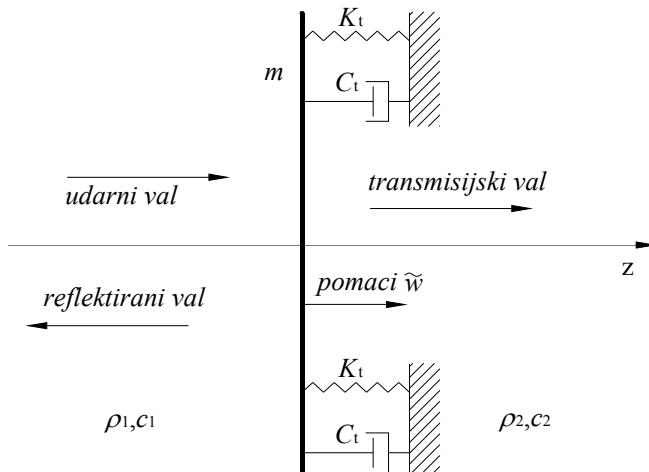
U literaturi se pojavljuje još i karakteristična specifična akustička impedanca  $Z_0$  koja je karakteristika medija kroz koji prolazi val i izračunava se iz izraza

$$Z_0 = \rho c \quad (2.93)$$

gdje je  $\rho$  gustoća medija a  $c$  brzina širenja longitudinalnog vala kroz medij.

Idealizirani model transmisije zvuka kroz jednostruki beskonačni neoslonjeni panel [30] sastoji se od kontinuiranog beskonačnog nedeformabilnog panela s definiranom masom po jedinici površine  $m_p$  koji leži na viskozno prigušenom elastičnom ovjesu po cijeloj svojoj površini (slika 2.23). Za elastični ovjes su definirane veličine krutosti  $K_t$  i prigušenja  $C_t$  po jedinici površine. Navedeni model predstavlja približno rješenje za transmisiju zvuka kroz ploču (gredu) koji vibrira u 1. normalnom obliku vibriranja.

Efekti koji nastaju pri transmisiji zvuka kroz panel uzrokuju promjene u okolnom mediju koje se uzimaju u definiranje samog modela. Panel odvaja fluide različitih karakterističnih specifičnih akustičkih impedanci,  $\rho_1 c_1$  i  $\rho_2 c_2$ .



Slika 2.23 Idealizirani model normalne transmisije zvuka kroz jednostruki panel

Spomenuti model pretpostavlja ravninski zvučni val okomit na panel koji se može opisati izrazom

$$p_u(z, t) = \tilde{A}_1 e^{i(\omega t - k_1 z)} \quad (2.94)$$

gdje je  $k_1 = \omega/c_1$  broj udarnog vala.

Akustičko polje tlakova vala koji se reflekira od panela definira se izrazom

$$p_r(z, t) = \tilde{B}_1 e^{i(\omega t + k_1 z)} \quad (2.95)$$

Amplitude  $\tilde{A}_1$  i  $\tilde{B}_1$  su povezane s normalnom brzinom čestice na lijevoj strani pregrade, koja se giba s normalnom brzinom jednakom  $i\omega\tilde{w}$ . Slijedi jednakost

$$\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1 = i\omega\rho_1 c_1 \tilde{w} \quad (2.96)$$

Polje akustičkog tlaka nastalo pri radijaciji u negativnom smjeru osi  $z$  zbog pomaka  $\tilde{w}$  definira se izrazom

$$p_r^-(z, t) = \tilde{C}_1 e^{i(\omega t + k_1 z)} \quad (2.97)$$

gdje je  $\tilde{C}_1 = -i\omega\rho_1 c_1 \tilde{w}$ .

Odgovarajući val nastao pri radijaciji u pozitivnom smjeru osi  $z$  definira se izrazom

$$p_r^+(z, t) = \tilde{C}_2 e^{i(\omega t - k_2 z)} \quad (2.98)$$

gdje je

$$\tilde{C}_2 = -i\omega\rho_2 c_2 \tilde{w} \quad (2.99)$$

i  $k_2 = \omega/c_2$ .

Ova polja nazivaju se poljima radijacije.

Na temelju jednadžbi (2.94), (2.95) i (2.96) polje ukupnog akustičkog tlaka s lijeve strane panela izračunava se iz izraza

$$\begin{aligned} p^-(z, t) &= \tilde{A}_l e^{i(\omega t - k_l z)} + (\tilde{A}_l - i\omega\rho_l c_l \tilde{w}) e^{i(\omega t + k_l z)} \\ &= 2\tilde{A}_l \cos(k_l z) e^{i\omega t} - i\omega\rho_l c_l \tilde{w} e^{i(\omega t + k_l z)} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Jednadžba (2.100) može se napisati koristeći jednadžbu (2.97) pa onda glasi

$$p^-(z, t) = 2\tilde{A}_l \cos(k_l z) e^{i\omega t} + \tilde{C}_l e^{i(\omega t + k_l z)} \quad (2.101)$$

Prvi član u prethodnom izrazu predstavlja stojno interferentno polje nastalo prilikom udara o kompletno nepomičnu pregradu te refleksije od nje pa se isto može nazvati zaustavljeni akustički polje. Drugi član predstavlja akustičko polje nastalo pri gibanju panela. Ukupno polje s transmisijske strane panela u pozitivnom smjeru definirano je izrazom (2.98).

Jednadžba gibanja panela glasi

$$m\ddot{w} + C_t \dot{w} + K_t w = p(z=0^-, t) - p(z=0^+, t) \quad (2.102)$$

gdje se  $z=0^-$  i  $z=0^+$  referiraju na akustičke tlakove s lijeve i desne strane panela. Uvrštavanjem jednadžbi (2.98) i (2.100) u prethodni izraz dobiva se slijedeći oblik jednadžbe gibanja panela

$$(-\omega^2 m_p + i\omega C_t + K_t) \tilde{w} = 2\tilde{A}_l - i\omega\rho_l c_l \tilde{w} - i\omega\rho_2 c_2 \tilde{w} \quad (2.103)$$

Član koji slijedi iz radijacije u ukolni fluid čija masa utječe na gibanje samog panela (eng. *fluid-loading*) nalazi se s desne strane jednadžbe (2.103) i može se priključiti lijevoj strani u kojoj su članovi koji opisuju panel u vakumu pa se dobiva izraz

$$(-\omega^2 m_p + i\omega(C_t + \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) + K_t) \tilde{w} = 2\tilde{A}_l \quad (2.104)$$

Član koji predstavlja prigušenje zbog radijacije dodaje se mehaničkom prigušenju. Ukoliko se lijevi dio izraza (2.104) izrazi pomoću brzine čestice

$$\tilde{v} = i\omega \tilde{w} \quad (2.105)$$

umjesto s pomakom  $\tilde{w}$  izraz (2.104) može se napisati u obliku

$$\left( i\left( \omega m_p - \frac{K_t}{\omega} \right) + (C_t + \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \right) \tilde{v} = 2\tilde{A}_l \quad (2.106)$$

ili

$$(\tilde{z}_p + \tilde{z}_f) \tilde{v} = 2\tilde{A}_l \quad (2.107)$$

gdje je  $\tilde{z}_p$  specifična akustička impedanca u vakumu (eng. *in-vacuo impedance*) a  $\tilde{z}_f$  specifična akustička impedanca zbog gibanja u fluidu (eng. *fluid-loading impedance*).

Član s desne strane jednakosti  $2\tilde{A}_1$  u izrazu (2.107) predstavlja prislu na blokirano pregradu u obliku polja akustičkog tlaka. Izraz (2.107) dokazuje da se izračun transmisije normalnih ravninskih valova kroz beskonačni neoslonjeni panel može provesti kao izračun odziva panela na akustički tlak zaustavljenog udarnog akustičkog polja na površini panela. Takvo rastavljanje ukupnog polja je primjenjiv za sve elastične strukture uronjene u fluid (eng. *fluid-loaded*), međutim u većini praktičnih slučajeva analiza je mnogo komplikiranija nego u ovom jednostavnom jednodimenzionalnom modelu.

Iz jednadžbi (2.99) i (2.107) slijedi

$$\begin{aligned}\tilde{C}_2 &= \rho_2 c_2 \tilde{v} = \frac{2\tilde{A}_1 \rho_2 c_2}{\tilde{z}_p + \tilde{z}_f} \\ \tilde{C}_2 &= \frac{2\tilde{A}_1}{i \left( \omega m_p - \frac{K_t}{\omega} \right) \rho_2 c_2 + \left( \frac{C_t}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + 1 \right)}\end{aligned}\quad (2.108)$$

Koefficijent transmisije zvučne snage  $\tau$  definira se kao omjer prenešene i udarne zvučne snage. U slučaju normalnog udara on je jednak koeficijentu transmisije zvučnog intenziteta koji se definira izrazom

$$\tau = \frac{\frac{|\tilde{C}_2|^2}{2\rho_2 c_2}}{\frac{|\tilde{A}_1|^2}{2\rho_1 c_1}} = \frac{4 \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}}{\left( \frac{\omega m_p - \frac{K_t}{\omega}}{\rho_2 c_2} \right)^2 + \left( \frac{\omega_1 m_p \eta_V}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + 1 \right)^2}\quad (2.109)$$

Prigušenje  $C_t$  definira se izrazom

$$C_t = \omega_1 m_p \eta_V \quad (2.110)$$

gdje je  $\eta_V$  koeficijent gubitaka u vakumu (eng. *in-vacuo loss factor*) a  $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_t}{m_p}}$  je vlastita frekvencija vibriranja neprigušenog panela.

Zvučne transmisione gubitke definira se s veličinom  $TL$  (ponekad se naziva i *STL*, eng. *sound transmission loss*) koja se definira izrazom

$$TL = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{\tau} \right), \text{dB} \quad (2.111)$$

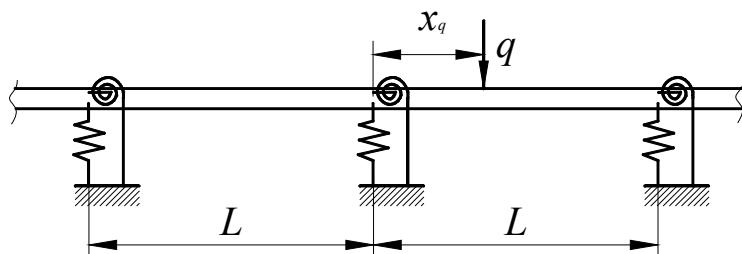
U slučaju kad se zvučni transmisione gubici  $TL$  odnose na transmisiju zvuka između dvije sobe onda se on naziva indeks zvučne izolacije  $R$  (eng. *sound reduction index*). U praksi koriste i pojmovi izolacijska moć pregrade i prigušenje zvuka.

## 2.4. Akustički odziv beskonačne periodički oslonjene grede

S obzirom na prirodu prisilnih vibracija uobičajeno je očekivati da je odziv konstrukcije u potpunosti kontroliran sa tipom prisile, u smislu da će konstrukcija vibrirati s frekvencijom prisile uz razlike u amplitudi i fazi s obzirom na mjesto djelovanja sile. Kod beskonačne periodički oslonjene grede pri djelovanju prisile u jednom periodu grede zbog niza refleksija od oslonaca u periodima grede odziv u ostalim periodima grede jednak je slobodnom vibriranju grede što nije za očekivati. Tek ukoliko prisila djeluje na cijelu periodički oslonjenu gredu akustički odziv grede je pod kontrolom akustičkog polja što se vidi u načinu definiranja propagacijskih konstanti.

### 2.4.1. Definiranje propagacijskih konstanti

Neka je jedan od perioda grede (slika 2.24.) opterećen sa silom  $qe^{i\omega t}$  u točki na udaljenosti  $x_q$  od lijevog oslonca. Navedena sila stvara polje pomaka u opterećenom periodu grede iz kojeg se mogu izračunati druge veličine odziva. U svim drugim, neopterećenim, periodima jedini pobuđeni odziv prenešen je kroz oslonce s valnom grupom koja se širi iz opterećenog perioda grede lijevo i desno, s karakterističnom propagacijskom konstantom  $\mu$  koja ima različite vrijednosti na pojedinim frekvencijama koje ne ovise o rasporedu prisile u opterećenom periodu već o frekvenciji i fizikalnim karakteristikama grede i oslonaca. Oblik vibriranja ne ovisi o prirodi opterećenja u opterećenom periodu grede ali omjer amplituda susjednih oblika vibriranja da.



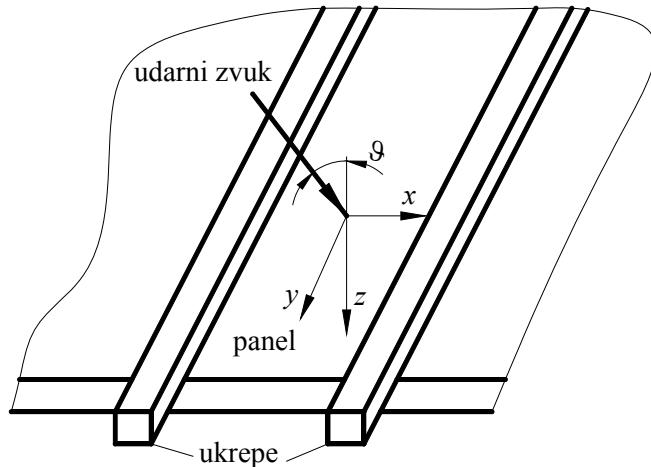
Slika 2.24 Beskonačna greda na jednako udaljenim elastičnim osloncima s harmonijskom prisilom u jednoj točki

Nakon izračuna propagacijske konstante ( $\mu = \mu_r + \mu_i i$ ), moguće je odrediti rubne uvjete za opterećeni period grede i odziv opterećenog perioda grede, zajedno s odzivom u svim točkama beskonačne periodično oslonjene grede. Izvan pobuđenog perioda grede gibanje valova je potpuno slobodno i određeno rubnim uvjetima u osloncima.

Ukoliko na cijelu beskonačnu periodično oslonjenu gredu djeluje ravninsko akustičko polje pod zadanim upadnim kutem propagacijska konstanta određuje se iz izraza

$$\mu = k_x(\omega)L - i\psi(\omega)L \quad (2.112)$$

gdje je  $\omega$  kružna frekvencija,  $\psi$  je koeficijent faznog prigušenja a  $k_x$  je komponenta broja vala po  $x$ -osi.



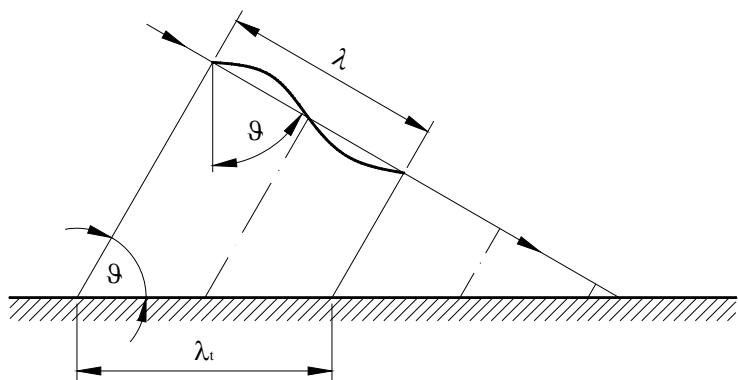
Slika 2.25 Prostorni prikaz panela oslonjenog u jednom smjeru pod utjecajem ravninskog akustičkog vala sa upadnim kutem  $\theta$

Na temelju slike 2.25 komponente broja vala  $k_x$  i  $k_z$  mogu se odrediti iz izraza:

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin \vartheta \\ k_z &= k \cos \vartheta \end{aligned} \quad (2.113)$$

gdje je  $k=\omega/c$  broj vala udarnog vala,  $c$  je brzina zvuka a  $\vartheta$  je upadni kut ravninskog vala u  $x-z$  ravnini. U ovom izračunu pretpostavlja se da je fronta vala okomita na ravnicu  $x-z$  tj. da je vektor broja vala unutar ravnine  $x-z$ .

Upadni kut vala definira valnu duljinu vala u gredi (eng. trace wave) na slici 2.26.



Slika 2.26 Definicija valne duljine "trace" vala pri zadanom upadnom kutu  $\vartheta$

Valna duljina trace vala može se odrediti na temelju prikaza valnih fronti ravninskog vala na slici 2.26 po izrazu:

$$\lambda_t = \lambda_x = \frac{\lambda}{\sin \vartheta} \quad (2.114)$$

iz kojeg slijede izrazi za broj fleksijskog vala u panelu

$$k_x = k \sin \vartheta \quad (2.115)$$

i za faznu brzinu fleksijskog vala u panelu

$$c_x = \frac{c}{\sin \vartheta}. \quad (2.116)$$

Preklapanje vrijednosti valne duljine slobodnog vala u gredi i valne duljine normalnog oblika fleksijskih vibracija uzrokuje nastanak velike propusnosti panela (kaže se da je panel u tom slučaju akustički transparentan).

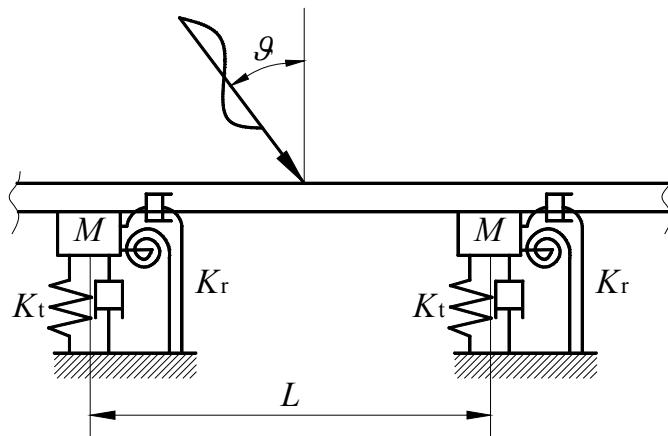
#### 2.4.2. Rješavanje pomoću metode virtualnog rada i metode propagacije valova

Kako je već napomenuto u uvodu, u ovoj disertaciji cilj je izračunati akustički odziv pravokutnog panela koji je periodički oslonjen sa što jednostavnijim modelom da se dobije optimalna brzina izračuna i zadrži dovoljna točnost. U slučaju kad se radi o ravninskim prisilnim valovima akustičkog polja i kad je visina perioda panela najmanje 3 puta veća od njegove širine [26] beskonačni periodički oslonjen panel može se modelirati kao beskonačna periodički oslonjena greda pa je ona uzeta za osnovni model.

S obzirom da se prisilno akustičko polje smatra harmonijskim i ravninskim i da se analizira beskonačna periodički oslonjena greda koristit će se metoda propagacije valova za definiranje prisile i odziva. Pod djelovanjem jednog od navedenih valova odziv u jednoj točki perioda grede mora biti identičan odzivu u točki susjednog perioda grede koja se nalazi na udaljenosti

jednakoj udaljenosti oslonaca od početne točke uz postojanje fazne razlike jednake faznoj razlici između akustičkih tlakova u tim točkama. Navedeni odziv može se prikazati sa konačnom grupom prostornih harmonijskih valova. Relativne amplitude pojedinih valova u valnoj grupi procijenjene su u analizi i pokazano je da manji dio valova primjetno utječe na ukupni odziv na zadanoj frekvenciji.

Izračun propagacijske konstante slobodnog gibanja valova u periodično oslonjenoj gredi nije potreban kod određivanja prisilnog odziva za slučaj kad prisila djeluje na cijelu gredu (vidi odlomak 2.4.1.).



Slika 2.27 Geometrijske karakteristike beskonačne periodički oslonjene grede

Ravninski val udara o ravnu gredu periodično oslonjenu na oslonce, te stvara reflektirane valove, gibanje grede i transmisijske valove. Na transmisijskoj strani nema reflektiranih valova od okoline.

Zbog periodične prirode sustava očekuje se da će odziv sustava isto biti periodičan. Temeljem takvih pretpostavki poprečno se gibanje grede na slici 2.27 može opisati kao red prostornih harmonijskih valova [26]

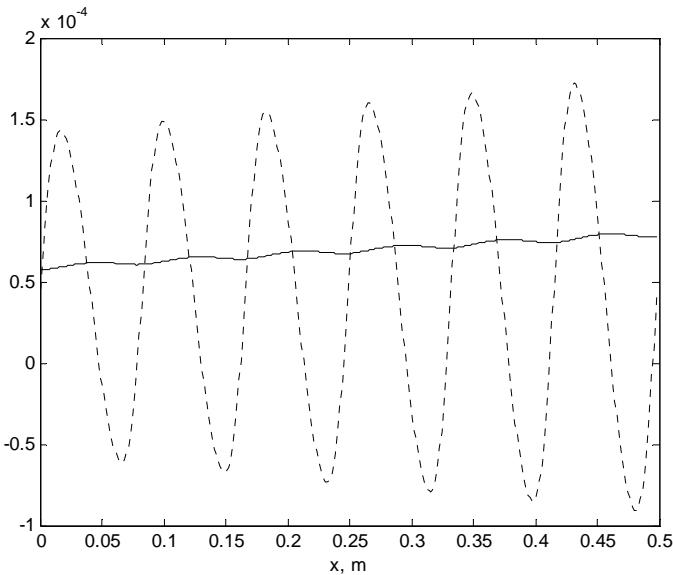
$$w(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-i[(\mu + 2n\pi)/L]x} e^{iot}$$

gdje je  $w(x, t)$  poprečno gibanje grede, koeficijenti  $A_n$  su amplitude oblika vibriranja grede,  $L$  je udaljenost između oslonaca i  $\mu$  je karakteristična propagacijska konstanta prisilnog akustičkog polja.

Periodičnost odziva unešena je u rješenje tj. jednadžbu (2.63) sa sumom po članu  $n$  pa je strukturni val definiran kao suma prostornih harmonijskih valova označenih s indeksom  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ , za naprijed i nazad usmjereni valove, koji predstavljaju refleksije od oslonaca. Svaki od prostornih harmonijskih valova ne zadovoljava rubne uvjete ali njihova suma da.

Na slici 2.28 prikazano je rješenje odziva s definiranim vrijednostima  $A_n$ ,  $\mu$ ,  $n$ ,  $L$  te tangens kuta nagiba tangente (zakreta) za sve prikazane točke grede po izrazu

$$\frac{dw}{dx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (-i)(\mu + 2n\pi)/L \cdot e^{-i[(\mu + 2n\pi)/L]x} e^{iot} \quad (2.117)$$



Slika 2.28 Nagib tangente na elastičnu liniju grede ----- ( $\theta$ , rad) i oblik prisilnog vibriranja grede \_\_\_\_\_ ( $w$ , m)

Iz slike 2.28 je vidljivo da se s prikazom zakreta jasnije vidi oblik vibriranja što je osobito važno kad se oslonci mogu poprečno gibati.

Iz upadnog kuta vala u zraku i iz reflektiranog vala koji nastaje iz definiranog gibanja grede slijedi određivanje komponenata brzine i određivanje potencijala brzine. Potencijal brzine u nekoj točki s upadne strane grede sastoji se od potencijala upadnog i reflektiranog vala. Za reflektirani val se očekuje da isto bude prostorno periodičan pa je valni potencijal brzina  $\Phi_1(x,z,t)$  opisan s ovim izrazom

$$\Phi_1(x,z,t) = e^{-i((\mu/L)x+k_{z0}z-\omega t)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-i[(\mu+2n\pi)/L]x-k_{zn}z-\omega t} \quad (2.118)$$

gdje prvi član izraza predstavlja potencijal upadnog vala jedinične amplitute a drugi član izraza predstavlja reflektirani val. Za  $\Phi_2(x,z,t)$ , potencijal brzine na transmitiranoj strani panela, se isto očekuje da bude periodičan, pa se definira izrazom

$$\Phi_2(x,z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i[(\mu+2n\pi)/L]x-k_{zn}z-\omega t} \quad (2.119)$$

U jednadžbama (2.118) i (2.119),  $k_{zn}$  je broj vala ( $n$ -tog prostornog harmonijskog vala... $2n\pi$ ) u  $z$ - smjeru, te se on može izračunati iz izraza

$$k_{zn} = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}_{k^2} - \underbrace{\left(\frac{\mu+2n\pi}{L}\right)^2}_{k_{xn}^2}} \quad (2.120)$$

koji slijedi iz izraza za ukupni broj vala

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 \quad (2.121)$$

Koeficijenti  $B_n$  i  $C_n$  mogu se smatrati amplitudama oblika vibriranja reflektiranog i transmisijskog vala. Amplitude vlastitih oblika vibriranja reflektiranog i transmisijskog vala povezuju se s onima od strukturnog vala uzimajući u obzir rubne uvjete poprečnih brzina [68].

Na koordinati  $z=0$  vrijedi

$$-\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = i\omega w \quad (2.122)$$

$$-\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = i\omega w \quad (2.123)$$

Uvrstivši jednadžbe (2.63), (2.118) i (2.119) u jednadžbe (2.122) i (2.123) dobijaju se izrazi

$$\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{[(\mu+2n\pi)/L]x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{zn} B_n e^{[(\mu+2n\pi)/L]x} - k_{z0} e^{-(\mu/L)x} = 0, \quad (2.124)$$

$$\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{[(\mu+2n\pi)/L]x} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{zn} C_n e^{[(\mu+2n\pi)/L]x} = 0 \quad (2.125)$$

Jednadžbe (2.124) i (2.125) vrijede za sve vrijednosti varijable  $x$  iz čega se izračunava odnos između amplituda oblika vibriranja.

Jednadžba (2.124) daje dva rješenja koeficijenta  $B_n$

$$B_n = 1 - \omega \frac{A_n}{k_{zn}}, \text{ kad je } n = 0 \text{ i} \quad (2.126)$$

$$B_n = -\omega \frac{A_n}{k_{zn}}, \text{ kad je } n \neq 0. \quad (2.127)$$

dok iz jednadžbe (2.125) slijedi

$$C_n = \omega \frac{A_n}{k_{zn}} \quad (2.128)$$

Iz izraza (2.126 i 2.127) te (2.128) vidljivo je da se koeficijenti  $B_n$  i  $C_n$  mogu izračunati iz koeficijenta  $A_n$  pa se u nastavku opisuje postupak izračuna koeficijenta  $A_n$ .

Po principu virtualnog rada (vidi odlomak 2.2.2.2.) ukupan rad učinjen na jednom periodu grede mora biti jednak nuli za sve virtualne pomake (2.66) [26]

$$\delta w = \delta A_m e^{-i[(\mu+2m\pi)/L]x-\omega t}$$

s time da u ovom slučaju jednadžba gibanja perioda grede iznosi

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - m_g \omega^2 w - i\omega \rho_0 (\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \quad (2.129)$$

gdje je  $D=EI$  fleksijska krutost grede (2.77, 2.65),  $m_g$  masa perioda grede po jedinici duljine a  $\rho_0$  je gustoća zraka. Zadnji član u prethodnoj jednadžbi (2.129) je član koji omogućuje povezivanje akustičkih i strukturnih valova.

Virtualni rad kojeg vrši greda može se prikazati ovim izrazom:

$$\delta \Pi_p = \int_{x=0}^L \left( D \frac{d^4 w}{dx^4} - m_g \omega^2 w - i\omega \rho_0 (\Phi_1 - \Phi_2) \right) \delta w^* \quad (2.130)$$

gdje  $\delta w^*$  predstavlja kompleksno konjugirani virtualni pomak iz jednadžbe (2.66)

$$\delta w^* = \delta A_m^* e^{i[(\mu+2m\pi)/L]x}. \quad (2.131)$$

Za slučaj kad je  $x=0$  kompleksno konjugirani virtualni pomak  $\delta w^*$  jednak je  $\delta A_m^*$ .

Uvrštavanjem jednadžbi (2.118) i (2.119) u jednadžbu (2.130) može se odrediti izraz za virtualni rad učinjen s panelom

$$\begin{aligned} \delta \Pi_p &= \delta A_m^* \left\{ \int_0^L D \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\mu + 2n\pi}{L} \right)^4 A_n e^{-i[(\mu+2n\pi)/L]x} e^{i[(\mu+2m\pi)/L]x} dx \right. \\ &\quad - \int_0^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_g \omega^2 A_n e^{-i[(\mu+2n\pi)/L]x} e^{i[(\mu+2m\pi)/L]x} dx \\ &\quad - \int_0^L i\omega \rho_0 \left[ e^{-i(\mu/L)x} e^{-ik_{z0}z} e^{i[(\mu+2m\pi)/L]x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{ik_{zn}z} e^{-i[(\mu+2n\pi)/L]x} e^{i[(\mu+2m\pi)/L]x} \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i[(\mu+2n\pi)/L]x} e^{-i[(\mu+2m\pi)/L]x} e^{-ik_{zn}z} \right] dx \right\}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Virtualni rad poprečne i fleskijske opruge te točkaste mase na koordinatama oslonca već su izračunati pri rješavanju slobodnih vibracija što je rezultiralo s izrazima (2.68), (2.69) i (2.70) redom.

Prema principu virtualnog rada ukupnog sustava potrebno je da suma virtualnih radova bude jednak 0

$$\delta \Pi_p + \delta \Pi_t + \delta \Pi_r + \delta \Pi_M = 0$$

Izračunavši integrale u  $\delta\Pi_p$  jednadžba (2.71) dobiva ovaj oblik

$$\begin{aligned} & \left[ D\left(\frac{\mu+2m\pi}{L}\right)^4 - m_g\omega^2 \right] A_m + \left( \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n + \frac{K_r}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left( \frac{\mu+2n\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu+2m\pi}{L} \right) \\ & = i\omega\rho_0 [B_m - C_m + 1], \quad \text{kad je } m=0, \\ & = i\omega\rho_0 [B_m - C_m], \quad \text{kad je } m \neq 0. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Slijedom uvrštavanja odnosa između amplituda oblika vibriranja ( $A_n$ ,  $B_n$  i  $C_n$ ) definiranih u jednadžbama (2.126 i 2.127) i (2.128), jednadžba (2.133) dobiva novi oblik

$$\begin{aligned} & \left[ D\left(\frac{\mu+2m\pi}{L}\right)^4 - m_g\omega^2 + \frac{2\rho_0\omega^2 i}{k_{zm}} \right] A_m + \left( \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n + \frac{K_r}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left( \frac{\mu+2n\pi}{L} \right) \left( \frac{\mu+2m\pi}{L} \right) \\ & = 2\omega\rho_0 i, \quad \text{kad je } m=0, \\ & = 0, \quad \text{kad je } m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Analiza virtualnog rada za bilo koji period grede dovela bi do identičnog skupa jednadžbi.

#### 2.4.2.1. Rješavanje matrične jednadžbe prisilnih vibracija

Postupak rješavanja uključuje ispisivanje izraza (2.134) u matričnom obliku i određivanje koeficijenata  $A_n$ . Matrice imaju ovaj oblik za slučaj kad je dokazano da rješenje konvergira s pet prostornih harmonijskih valova. Slijedi da su indeksi pojedinih harmonika  $n$  i  $m=-2, -1, 0, 1, 2$  za jednadžbu (2.72) iz kojih će slijediti izračun koeficijenata  $A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2$ . Matrice imaju ovaj oblik

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' & E' \\ F' & G' & H' & I' & \\ J' & K' & L' & & \\ & M' & N' & O' & \\ \text{simetrično} & & & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{VR}} \begin{bmatrix} A_{-2} \\ A_{-1} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

gdje se koeficijenti u matrici definiraju po izrazima

$$A' = \left[ D\left(\frac{\mu+2(-2)\pi}{L}\right)^4 - m_g\omega^2 + \frac{2\omega^2\rho_0 i}{k_{z-2}} \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu+2(-2)\pi}{L} \right)^2$$

$$F' = \left[ D \left( \frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 + \frac{2\omega^2 \rho_0 i}{k_{z-1}} \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right)^2$$

$$J' = \left[ D \left( \frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 + \frac{2\omega^2 \rho_0 i}{k_{z0}} \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)^2$$

$$M' = \left[ D \left( \frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 + \frac{2\omega^2 \rho_0 i}{k_{z1}} \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)^2$$

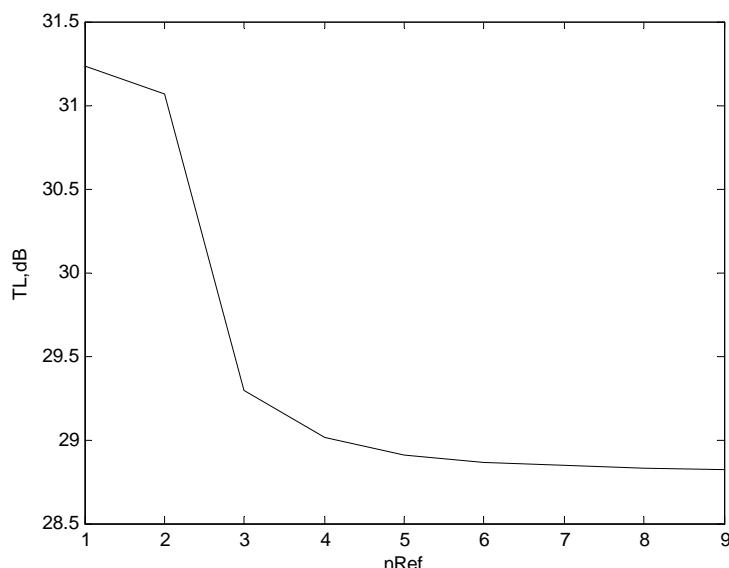
$$O' = \left[ D \left( \frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 + \frac{2\omega^2 \rho_0 i}{k_{z2}} \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L} \left( \frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)^2$$

$$P' = i2\omega\rho_0$$

dok su koeficijenti  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $G'$ ,  $H'$ ,  $I'$ ,  $K'$ ,  $L'$  i  $N'$  već navedeni u odlomku 2.2.2.3.

#### 2.4.2.2. Konvergencija rezultata

S obzirom da je rješenje dobiveno u obliku reda, potrebno je upotrijebiti dovoljan broj prostornih harmonijskih valova da bi rješenje konvergiralo. Jednom kada rješenje počne konvergirati na zadanoj frekvenciji, može se pretpostaviti da će konvergirati na svim nižim frekvencijama po literaturi [32] (slika 2.29) ali konvergencija ovisi i o prigušenju u sustavu što je opisano u odlomku 3.3.1.



Slika 2.29 Konvergencija rezultata zvučnih transmisijskih gubitaka  $TL$

Navedeno vrijedi i za izračun slobodnih vibracija.

### 2.4.2.3. Koeficijent transmisije zvučne snage

Nakon izračuna koeficijenata  $A_n$ ,  $B_n$  i  $C_n$  slijedi izračun udarnog normalnog intenziteta [32]

$$I_u = \frac{\omega \rho_0 k_{z0}}{2} \quad (2.136)$$

i transmisijskog normalnog intenziteta

$$I_t = \frac{\omega \rho_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \operatorname{Re}[k_{zn}] \quad (2.137)$$

iz kojih slijedi koeficijent transmisije zvučne snage po izrazu

$$\tau_b(\vartheta) = \left| \frac{I_t}{I_u} \right| \quad (2.138)$$

gdje je  $\vartheta$  upadni kut.

Izračun srednjeg zvučnog transmisijskog gubitka  $TL$  za difuzno zvučno polje koeficijent transmisije zvučne snage  $\tau(\vartheta)$  se usrednjuje po izrazu (2.139)[73]

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^{\vartheta_{\text{lim}}} \tau_b(\vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta}{\int_0^{\vartheta_{\text{lim}}} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta} \quad (2.139)$$

gdje je  $\vartheta_{\text{lim}}$  upadni kut iznad kojeg se ne očekuje utjecaj upadnog vala na gredu. U literaturi [32]  $\vartheta_{\text{lim}}=72^\circ$  dok se u literaturi [73] navodi da  $\vartheta_{\text{lim}}$  može biti u rasponu od 70 do  $85^\circ$ . Analiza upadnog kuta  $\vartheta_{\text{lim}}$  nastavlja se u odlomcima 2.5.1. i 3.3.7.

Usrednjeni zvučni transmisijski gubitak  $TL_{sr}$  se dobija iz izraza

$$TL_{sr} = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{\bar{\tau}} \right) \quad (2.140)$$

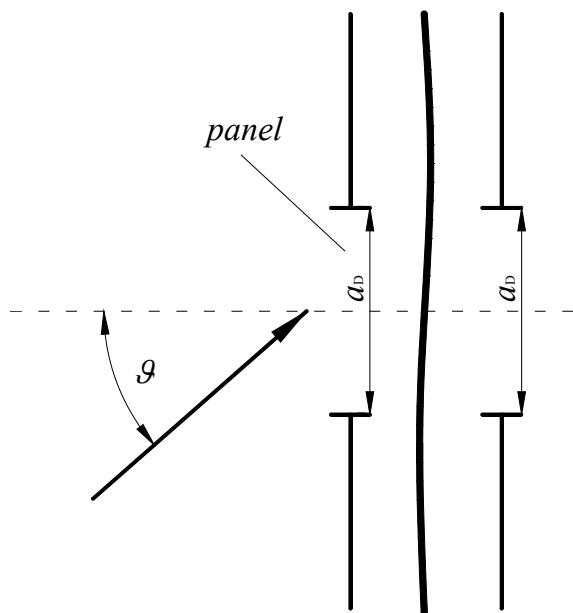
## 2.5. Akustički odziv konačnog periodički oslonjenog panela

Akustički odziv konačnog periodički oslonjenog panela izračunati će se iz akustičkog odziva beskonačne periodički oslonjene grede koristeći metodu prostornog isječka (eng. *spatial windowing*) [59].

### 2.5.1. Metoda prostornog isječka

Cilj metode je iz izračunatih vrijednosti zvučnih transmisijskih gubitaka za beskonačnu periodički oslonjenu gredu koja predstavlja panel, valnom metodom dobiti rezultate veće točnosti s boljim podudaranjem s eksperimentalnim rezultatima kod konačnih periodički oslonjenih panela.

Najčešći način smanjenja razlika između eksperimentalnih rezultata i valne metode je ograničenje maksimalnog upadnog kuta difuznog akustičkog polja a što nakon usrednjavnja daje bolje podudaranje sa eksperimentalnim rezultatima (2.139), međutim, navedena metoda ne uključuje konačne dimenzije panela u svoj izračun što ju čini nekompletnom za temu discretacije.



Slika 2.30 Shematski prikaz metode prostornog isječka

Metoda prostornog isječka sastoji se iz isjecanja dijela prisilnog akustičkog polja koji se nalazi uz konačni panel (gredu), izračuna vibracijskog polja brzina beskonačnog panela te

isjecanja dijela dobivenog vibracijskog polja iz kojeg se izračunava radijacijsko polje s druge strane panela (slika 2.30 )

Po metodi prostornog isječka slijedi da se koeficijent transmisije zvučne snage za konačni panel  $\tau_k$  može izračunati iz koeficijenta transmisije zvučne snage za beskonačni panel  $\tau_b$ , efikasnosti radijacije konačnog panela  $\sigma_{ef}$  i upadnog kuta ravninskog vala  $\vartheta$  po izrazu:

$$\tau_k = \tau_b (\sigma_{ef} \cos \vartheta)^2 \quad (2.141)$$

Nakon izračuna koeficijenta transmisije zvučne snage za sve upadne kuteve [0-90°] slijedi usrednjavanje po izrazu (2.139) gdje je  $\vartheta_{lim}=90^\circ$ .

Metodu prostornog isječka može se primjeniti za srednji i visoki frekvencijski pojas što je definirano sa valnom duljinom odziva panela. U slučaju kad valna duljina vala u panelu postane red veličine ili manja od udaljenosti između oslonaca, metodom prostornog isječka i uz definiranje gibanja s redom prostornih harmonijskih valova može se izračunati ponašanje konačnog jednostavno oslonjenog panela te se beskonačni model može koristiti na srednjim i visokim frekvencijama čak i za slučajeve kad broj perioda panela nije veći od 3 ili 4.

### 2.5.2. Efikasnost radijacije

Efikasnost radijacije  $\sigma_{ef}$  omjer je radijacijskog otpora  $R_{mn}$  i raznih konstanti vezanih uz karakteristike panela i okolnog medija [78,81]:

$$\sigma_{ef} = \frac{R_{mn}}{\rho_0 c a_D b_D} \quad (2.142)$$

tj. gustoće zraka  $\rho_0$ , brzine zvuka u okolnom mediju  $c$  i dimenzija panela  $a_D \times b_D$ . Navedena veličina nastala je iz veličine akustičkog otpora a s ciljem da se spriječi utjecaj impedance akustičkog okolnog medija  $\rho_0 c$  i dimenzije panela  $a_D \times b_D$ . Radijacijski otpor  $R_{mn}$  izračunava se iz omjera akustičke snage radijacije konačnog panela  $\Pi$  i usrednjene vibracijske brzine (eng. *mean-square velocity*).

$$R_{mn} = \frac{\Pi}{\langle v^2 \rangle} \quad (2.143)$$

Usrednjena vibracijska brzina izračunava se iz izraza

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \frac{1}{a_D b_D} \int_A |v|^2 dA \quad (2.144)$$

u kojem su  $a_D$  i  $b_D$  dimenzije pravokutnog panela a  $v$  amplitudo vibracijskih brzina u pojedinim točkama panela. S obzirom da su do sada izračunate vibracijske brzine beskonačne

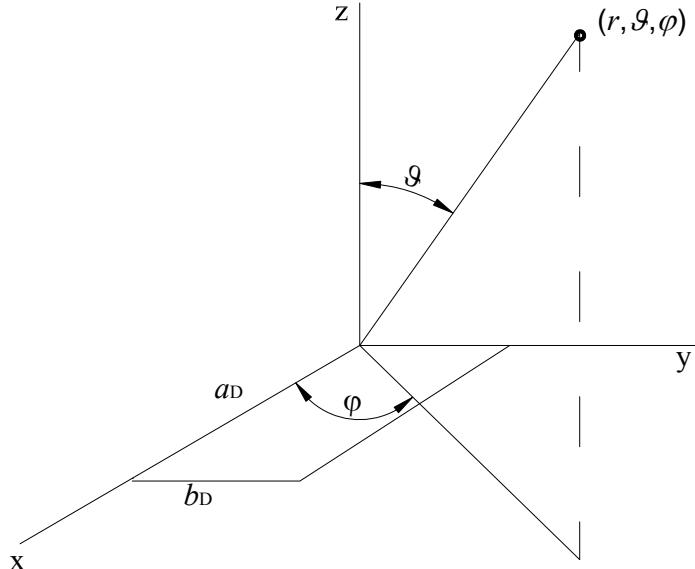
grede  $dw(x)/dt$  transformacija u vibracijske brzine konačnog panela je izvršena množenjem iste sa  $\sin(\pi x/a_D) \sin(\pi y/b_D)$  kako bi se vibracije približile jednostavnim rubnim uvjetima iz eksperimenta gde je elastična brtva na svim vanjskim rubovima.

$$v(x, y) = \frac{dw(x)}{dt} \sin\left(\frac{\pi x}{a_D}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b_D}\right). \quad (2.145)$$

Usrednjena akustička snaga  $\Pi$  radijacije panela izračunava se iz izraza

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|p_\omega|^2}{\rho_0 c} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (2.146)$$

gdje je  $\rho_0$  gustoća zraka,  $c$  brzina zvuka u zraku,  $r$  polumjer polusfere do daljnog polja a  $\vartheta$  i  $\varphi$  su kutovi sfernog koordinatnog sustava koji se nalazi u kutu pravokutnog panela, slika 2.31. Polumjer polusfere do daljnog polja  $r$  minimalno je za red veličine veći od najveće dimenzije panela.



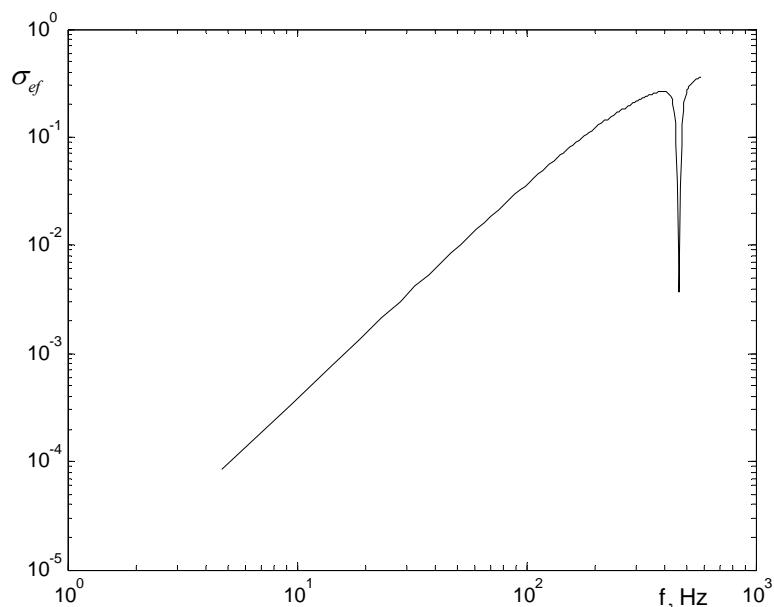
Slika 2.31 Pravokutni panel u beskonačnoj ravni

Akustički tlak u dalnjem polju  $p_\omega$  dobija se pomoću Rayleigh-ovog integrala definiranog u izrazu

$$p_\omega = -ik\rho_0 c \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \int_0^{b_D} \int_0^{a_D} v(x, y) e^{\left[-i\left(\frac{\alpha' x}{a_D}\right) - i\left(\frac{\beta' y}{b_D}\right)\right]} dx dy \quad (2.147)$$

gdje je  $k$  broj vala u okolnom zraku a  $\alpha'$  i  $\beta'$  su definirane izrazima  $\alpha' = ka_D \sin \vartheta \cos \varphi$  i  $\beta' = kb_D \sin \vartheta \sin \varphi$ .

Postoje dva glavna utjecajna faktora zbog kojih se efikasnost radijacije  $\sigma_{ef}$  stvarnog konačnog panela unutar ravnine zida razlikuje od teorijskog izračuna beskonačnog panela: 1) postojanje normalnih oblika vibriranja koji slijede iz ukupnih dimenzija i 2) efekt difrakcije koji nastaje zbog manje dimenzije panela od valne duljine akustičkih valova na radijacijskoj strani panela. Dodatne razlike nastaju zbog utjecaja akustike prostorija između kojih se nalazi panel. Najveće razlike pojavljuju se na niskim frekvencijama dok su vrijednosti iznad koincidentne frekvencije red veličine 1 što je vidljivo na slici 2.32.



Slika 2.32 Efikasnost radijacije konačnog periodički oslonjenog panela

Jednostruki i dvostruki integrali u izrazima (2.144), (2.146) i (2.147) izvršeni su pomoću numeričke integracije koristeći Simpsonovo pravilo [79].

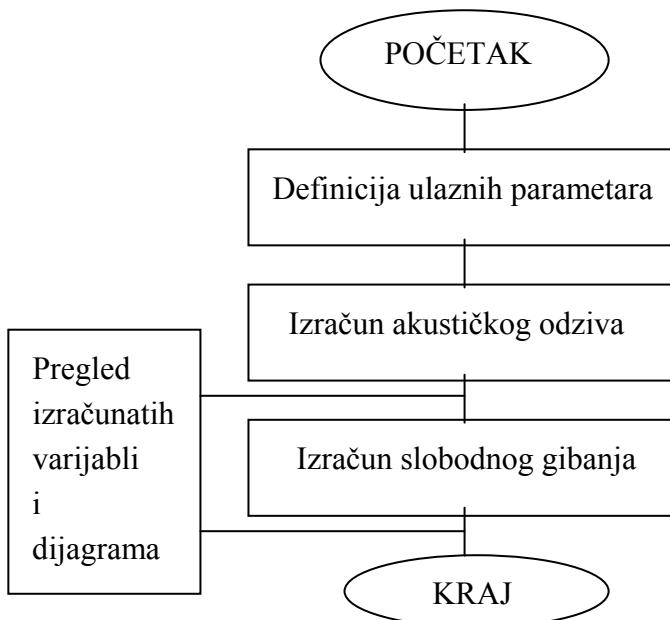
## **Poglavlje 3.**

### **3. Numerička analiza**

U ovom je poglavlju predstavljeno vlastito programsko rješenje AKUPAN koje je izrađeno na temelju teorijskih postavki iznesenih u 2. poglavlju. Opisan je slijed izračunavanja referentnih veličina i osnovne značajke funkcionalnosti vlastitog programskog rješenja AKUPAN napisanog u programu Matlab. Na kraju su navedeni dobiveni numerički rezultati.

#### **3.1. Opis programskog rješavača**

Programski rješavač sastoji se iz dvije funkcionalne podcjeline: izračunavanja akustičkog odziva i slobodnog gibanja. Na slici 3.1 prikazan je pojednostavljen dijagram toka vlastitog programskog rješenja AKUPAN s ciljem naglašavanja da je tijekom izračuna moguće pregledavati sve dijagrame i varijable koje su izračunate do trenutka pregledavanja.



Slika 3.1 Dijagram toka numeričkog modela

### 3.1.1. Izračun akustičkog odziva (prisilnog gibanja)

Na početku koda definirane su karakteristike materijala panela gustoća  $\rho$ , modul elastičnosti  $E$ , Poissonov koeficijent  $\nu$ , faktor prigušenja  $\eta$  i debljine panela  $h$ .

Nakon toga izračunate su specifična masa po duljini grede  $m_g$ , moment inercije poprečnog presjeka grede  $I$ , i fleksijska krutost grede  $D$ .

Definirane su i karakteristike oslonaca: udaljenost između oslonaca  $L$ , masa pomičnog dijela oslonaca  $m_M$ , krutost fleksijske opruge  $K_r$ , prigušenje fleksijske opruge  $\eta_r$ , krutost poprečne opruge  $K_t$  i prigušenje poprečne opruge  $\eta_t$  te karakteristike prisilnog vala u zraku: gustoća zraka  $\rho_0$ , fazna brzina vala u zraku  $c$ , upadni kut ravninskog vala  $\vartheta$ , fazna brzina fleksijskog vala u gredi  $c_x$  i koeficijent faznog prigušenja  $\psi$ .

Odabran je frekvencijski pojas izračuna s parametrom maksimalne frekvencije  $\Omega_{MAX}$ , brojem frekvencija u 1. propagacijskom pojasu  $n_\Omega$ , maksimalnom frekvencijom izračuna  $f_{MAX}$ , maksimalnom kružnom frekvencijom  $\omega_{MAX}$ , frekventni pojas između susjednih frekvencija  $\Delta f$ , brojem frekvencija izračuna  $n_f$  i minimalnom frekvencijom izračuna  $f_{MIN}$  nakon čega su za maksimalnu frekvenciju izračunate vrijednosti broja prisilnog vala u zraku  $k_{\text{pris}}$ , broja prisilnog vala u gredi po  $x$ -osi  $k_{x\text{Pris}}$ , broja prisilnog vala u gredi po  $y$ -osi  $k_{y0\text{Pris}}$  i prisilna propagacijska konstanta  $\mu_{\text{Pris}}$ .

Nakon toga odabran je dovoljan broj prostornih harmonijskih valova  $n_{\text{RefPris}}$  u sklopu dokaza konvergencije rezultata koeficijenta transmisije zvučne snage  $TL_{\text{konv}}$ .

U nastavku su izračunate sljedeće varijable za zadani frekvencijski pojas: udarni normalni intenzitet  $I_u$ , transmisijski normalni intenzitet  $I_t$ , koeficijent transmisije zvučne snage  $\tau$  i zvučni transmisijski gubici  $TL$ .

S dobivenim rezultatima izračunato je resultantno gibanje grede pri zadanom prisilnom valu u zraku za odabrani broj perioda za prikaz vibriranja  $n_p$  i broj točaka po svakom periodu  $n_T$  za koje su izračunate  $x$  koordinate. U nastavku je izračunat oblik vibriranja ukupnog vala  $w_{x\text{Pris}}$  te fazni kutevi ukupnog vala po duljini perioda grede  $\varphi_{\text{Pris}}$ , oblici vibriranja prostornih harmonijskih valova  $w_{nx\text{Pris}}$ , fazni kutevi prostornih harmonijskih valova po duljini grede  $\varphi_{nq\text{Pris}}$  i fazne brzine prostornih harmonijskih valova  $c_{n\text{Pris}}$ .

U nastavku je definirana diskretizacija modela konačnog panela dimenzija: duljina panela  $a_D = n_p L$ , širina panela  $b_D$  i diskretizacija površine polusfere u dalnjem polju polumjera  $r$  na jednake površine definirajući odgovarajuće kuteve  $\theta$  i  $\varphi$  točaka koje se nalaze u kutevima površina.

Pripremljene su i matrice za numeričku integraciju jednostrukog i dvostrukog integrala po Simpsonovom pravilu.

Definiran je vibracijski odziv po diskretiziranoj površini panela  $\bar{v}$  te je izračunat akustički tlak po diskretiziranoj površini polusfere u dalnjem polju  $p_\omega$  koristeći numeričku integraciju. Izračunata je tada akustička snaga izvora i iz nje usrednjena efikasnost radijacije. Uslijedio je izračun koeficijenta transmisije zvučne snage za konačni panel usrednjen po izrazu (2.139) za sve upadne kuteve. Iz usrednjenoj koeficijenta transmisije zvučne snage izračunati su zvučni transmisijski gubici  $TL$  za prisilno difuzno polje.

### 3.1.2. Izračun slobodnog gibanja

Na početku 2. dijela koda određene su propagacijske konstante  $\mu_{\text{Slob}}$  i oblici vibriranja ukupnog vala  $w_1$ , fazni kutevi ukupnog vala po duljini perioda grede  $\varphi_{q1\text{Slob}}$  koristeći novu funkciju oblika (2.44) i oblici vibriranja ukupnog vala  $w_2$ , fazni kutevi ukupnog vala po duljini perioda grede  $\varphi_{q2\text{Slob}}$  koristeći funkcije oblika (2.45).

Nakon toga izračunate su amplitude prostornih harmonijskih valova  $w_{n1}$ , te njihovi fazni kutevi  $\varphi_{nq1Slob}$  i fazne brzine  $c_{nSlob}$  koristeći razvoj funkcije oblika u Fourierov red s prostornim harmonijskim valovima.

Na kraju koda napravljen je izračun propagacijskih konstanti  $\mu$ , amplituda  $w_3$ , faznih kuteva  $\varphi_{q3Slob}$  i faznih brzina prostornih harmonijskih valova  $c_{nSlob}$  rješavanjem matrice slobodnih vibracija dobivene s metodom virtualnih pomaka i prostornim harmonijskim valovima.

### 3.2. Postprocesor - interpretacija rezultata izračuna

S ciljem veće preglednosti razvoja koda i kasnijeg pregledavanja dobivenih rezultata razvijeno je više pomoćnih skripti (PLOT, RADNA i SADRZAJ).

Skripta PLOT služi za prikaz dobivenih dijagrama. Nakon pokretanja skripte pojavljuje se izbornik iz kojeg se bira potrebni dijagram. Nakon prikaza dijagrama ponovno se pojavljuje izbornik što daje slobodu daljnje analize dobivenih rezultata (npr. promjene frekvencijskih pojasa po osima, itd.). Slijedi ispis izbornika:

```
display('Odabratи broj pokraj imena naziva dijagrama:')
display('PRISILNO VIBRIRANJE:')
display('Dijagram TLkonv(nRef) (1)')
display('Dijagram TL(f) (2)')
display('Dijagram max.min. real.imag. komponente prisilnog odziva(f) (3)')
display('Dijagram 3D real.oblik.vibr.(f,x) (4)')
display('Dijagram contourf.real.oblik.vibr(f) (5)')
display('Dijagram real.imag. oblika vibriranja ukupnog vala na jednoj
frekvenciji (6)')
display('Dijagram A(ci,f) (7)')
display('Dijagram real.imag. oblika vibriranja prostornog harmonijskog vala
na jednoj frekvenciji (8)')
display('Dijagram prostornog harmonijskog vala u vremenu na jednoj
frekvenciji (9)')
display('SLOBODNO VIBRIRANJE:')
display('Dijagram 3D real.oblik.vibr(f,x) (10)')
display('Dijagram max.min. real.imag. komponente slobodnih vibracija(f)
(11)')
display('Dijagram coshm(f) (12)')
display('Dijagram mBISHOP 0-pi(f) (13)')
display('Dijagram A(ci,f) + kontrola A(f=konst,ci) i A(f=konst,cn)
slobodnih vibracija (14)')
display('Dijagram w1(x)-FOBLIKAI s funkcijama Fi na fMAX(15)')
display('Dijagram w2(x)-FOBLIKA0 s funkcijama Fi na fMAX(16)')
display('Dijagram mVIRT(an) i mBISH(an)(17)')
```

```

display('Dijagram real mPRIM1Virt(f) sve vrijednosti (18)')
display('Dijagram imag mPRIM1Virt(f) sve vrijednosti (19)')
display('Dijagram fje OBLIKA iz det(Meq)=0 I Meq*An=0 (20)')
display('Prikaz realnog vibriranja u vremenu iz fOBLIKAI s funkcijama Fi na
fMAX(21)');
display('Prikaz realnog vibriranja u vremenu iz fOBLIKAO s funkcijama Fi na
fMAX(22)');
display('Prikaz realnog vibriranja u vremenu iz det(Meq)=0 I Meq*An=0
(23)');
odabir=input('br. []= ');
if isempty(odabir)
    break;
end

```

Skripta RADNA služi za provjeru vrijednosti izračunatih matrica za vrijeme trajanja izračuna s glavnim kodom. Uz provjeru samog izračunatog broja u pojedinoj matrici moguće je istu pregledati u odgovarajućem dijagramu.

Skripta SADRŽAJ služi za praćenje razvoja koda u smislu pregleda broja linije u kodu gdje je izračunata pojedina varijabla ili matrica. Skripta polako raste kako se glavni kod izvršava tako da je moguće u svakom trenutku vidjeti koja je zadnja varijabla izračunata i koji je broj linije pored nje. U skripti su navedene i vrijednosti nekih jednostavnijih varijabli.

```

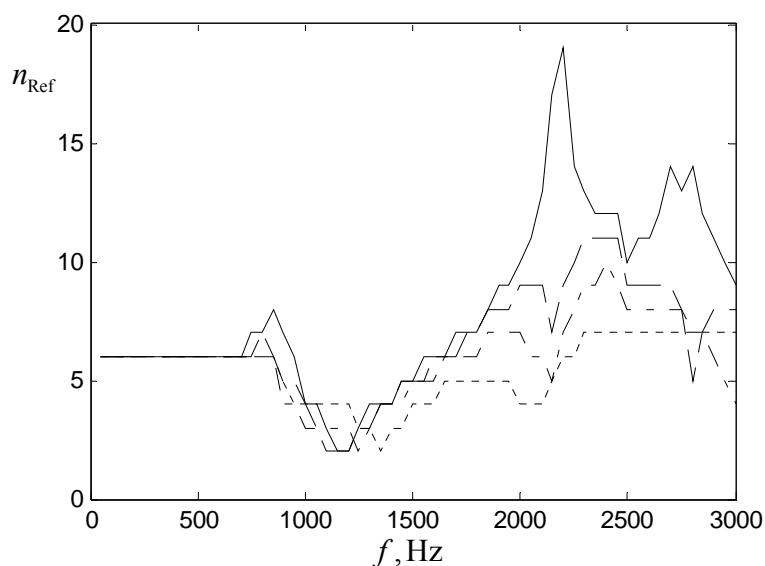
45      SADRŽAJ KODA: Analiza akustičkog odziva pravokutnog panela
49      IZRAČUN PRISILNOG GIBANJA (TL)
53
57          Definicija ulaznih varijabli
57
58          Materijal panela:
66      ro = 2700
76      E = 7.10e+010
85      ni = 0.00e+000
94      eta = 0.00e+000
98
99          Dimenzije panela:
107     h = 1.27e-003
116     L = 2.00e-001
120
121          Karakteristike panela
125     mp = 3.43e+000
131     I = 1.71e-010
136     DPris = 1.21e+001
137
138      ...

```

### 3.3. Numerički rezultati

#### 3.3.1. Verifikacija konvergencije rezultata

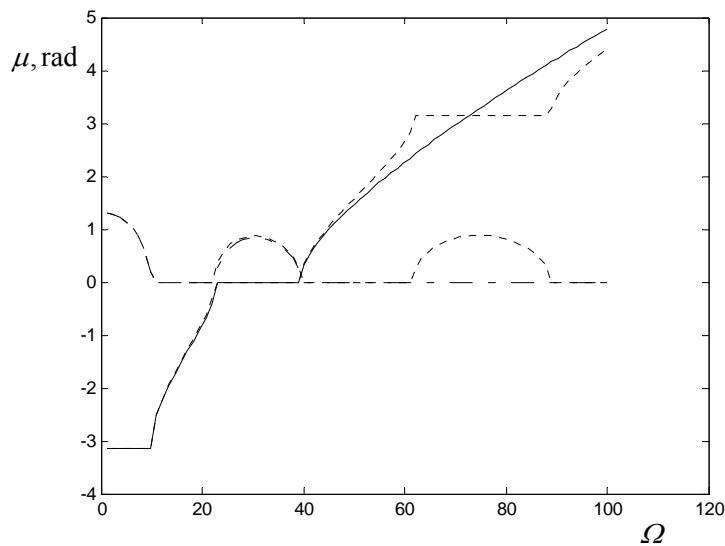
U numeričkom izračunu koristi se suma prostornih harmonijskih valova za definiranje odziva. Točnost rezultata je veća s rastom prostornih harmonijskih valova te je potrebno odrediti njihov dovoljan broj da bi se rezultat smatrao točnim (slika 2.29). Lee [32] smatra da je rezultat konvergirao ako se vrijednost izračunatog  $TL$ -a na najvišoj frekvenciji izračuna promijenila za 0,01 dB pri dodavanju dva prostorna harmonijska vala. Prilikom analize opisanog uvjeta primjećeno je da se na nižim frekvencijama od maksimalne ponekad pojavljuje potreba za većim brojem prostornih harmonijskih valova da bi se dobila zahtjevana točnost. Navedeni efekt vezan je uz veličinu prigušenja sustava kako je prikazano na slici 3.2.



Slika 3.2 *Utjecaj prigušenja u panelu  $\eta$  na potreban broj prostornih harmonijskih valova ( $n_{\text{Ref}}*2+1$ ) za periodički oslonjen panel:  $\eta=0$  ———,  $\eta=0,1$  -----,  $\eta=0,2$  -.-.-. i  $\eta=0,4$  ..... .*

Iz slike 3.2 je vidljivo da je sustav bez prigušenja puno nestabilniji što se u ovom slučaju manifestira u potrebi povećane veličine  $n_{\text{Ref}}$  da bi se sa sumom prostornih harmonijskih valova mogao izračunati točan zvučni transmisijski gubitak. U sustavu s dovoljnim prigušenjem maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojavljuje se na najvišoj frekvenciji izračuna kao što je i navedeno u relevantnoj literaturi [32]. Međutim, ukoliko sustav nema dovoljno prigušenja maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojaviti će se na nižoj frekvenciji.

Ukupan broj prostornih harmonijskih valova ( $n_{\text{Ref}}^* 2 + 1$ ) mora biti dovoljan i za definiranje slobodnih valova u periodički oslonjenom panelu što se provjerava s konvergencijom propagacijske konstante. Do maksimalnih odstupanja propagacijske konstante dolazi na najvišoj frekvenciji izračuna (slika 3.3) pa se na istoj provjerava veličina  $n_{\text{Ref}}$ .



Slika 3.3 Primjer odstupanja vrijednosti propagacijske konstante kod upotrebe nedovoljnog broja prostornih harmonijskih valova, propagacijska konstanta po izrazu (2.48) ..... i pomoću prostornih harmonijskih valova ( $\mu_r$  ..... i  $\mu_i$  .....)

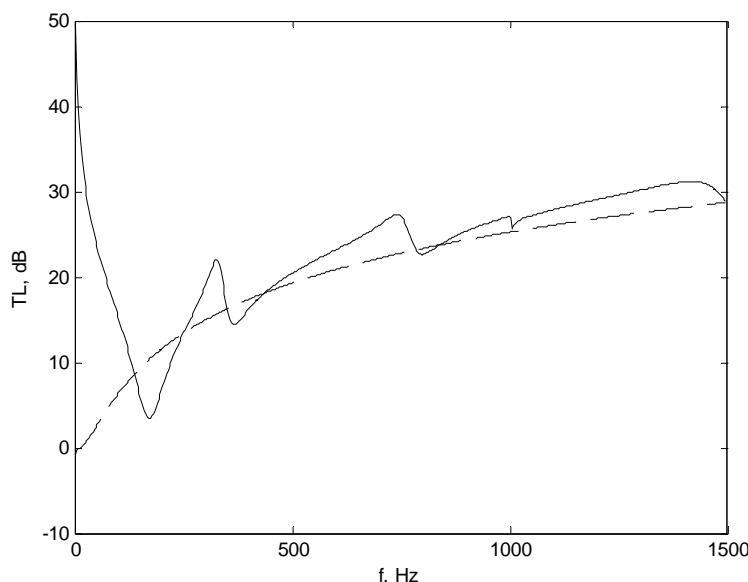
### 3.3.2. Analiza utjecajnih parametara na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela

Odabrani su osnovni ulazni parametri :

- krutost poprečne opruge,  $K_t = 3,6 \cdot 10^9$  N/m,
- krutost fleksijske opruge,  $K_r = 60$  Nm/rad,
- modul elastičnosti panela,  $E = 7,1 \cdot 10^{10}$  Pa,
- debљina panela,  $h = 0,00127$  m,
- masa pomicnog dijela oslonca,  $m_M = 0$  kg,
- Poissonov koeficijent,  $\nu = 0,33$ ,
- gustoća panela,  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup>,
- gustoća zraka,  $\rho_0 = 1,21$  kg/m<sup>3</sup>,
- upadni kut,  $\vartheta = 45^\circ$ ,
- faktor prigušenja u materijalu panela,  $\eta = 0,1$ ,
- udaljenost između oslonaca panela,  $L = 0,2$  m,

- koeficijent faznog prigušenja  $\psi = 1^\circ$ ,
- brzina zvuka u zraku,  $c = 343 \text{ m/s}$  i frekvencija  $f = 10\text{-}1500 \text{ Hz}$ .

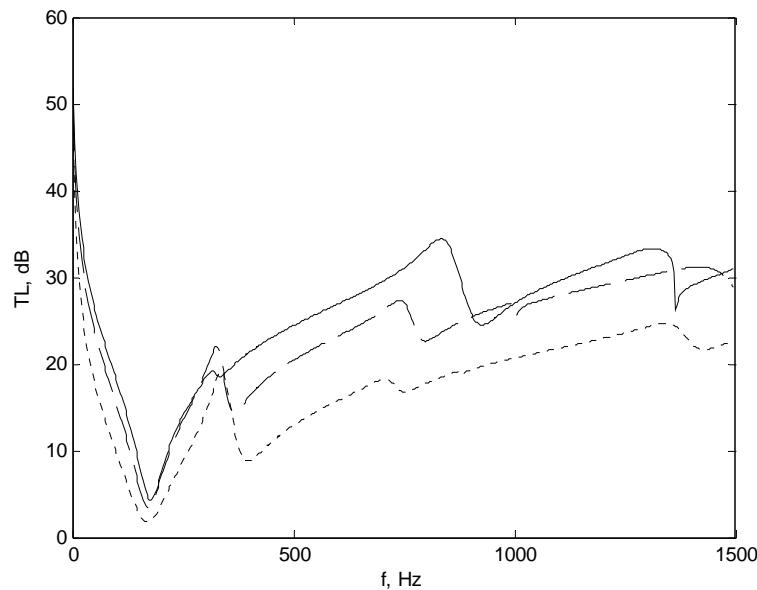
U pojedinim analizama koristit će se drugi ulazni parametri što će biti posebno naznačeno. Na slici 3.4 prikazane su krivulje zvučnog transmisijskog gubitka kroz panel,  $TL$ -a, za beskonačni periodički oslonjen panel i za beskonačni neoslonjen panel. Iz dijagrama se vidi osnovna razlika između  $TL$ -a navedenih panela. Veličina  $TL$ -a narasti će u niskom frekvencijskom pojasu kad se ukrijepi panel ali će zato u višem frekvencijskom pojasu doći do velikih oscilacija vrijednosti  $TL$ -a što je nepovoljno. Na navedenom primjeru je očito da se problem periodički oslonjenih panela skriva u novonastalim harmonicima koji nastaju zbog refleksija valova od oslonaca i rubnih krajeva kod konačnih panela.



Slika 3.4 *Usporedba zvučnih transmisijskih gubitaka TL-a za beskonačni periodički oslonjen panel* ——— i neoslonjen panel -----

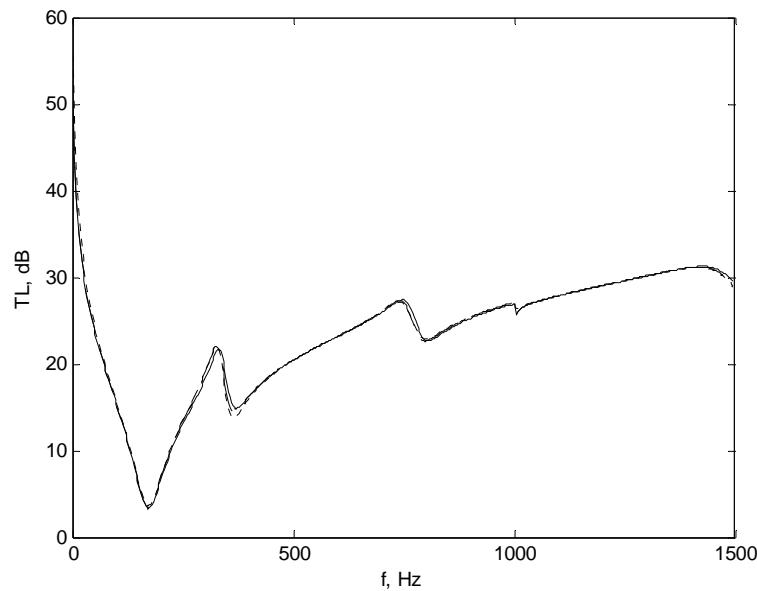
U praksi se kod periodički oslonjenih panela efekt zvučne transmisije događa na nižim frekvencijama od onih kod panela oslonjenih po svojim rubovima. Kao da je kritična frekvencija nakon upotrebe periodičkih oslonaca snižena za jednu ili više oktava, što ovisi o udaljenosti između oslonaca i krutosti u osloncima (fleksijskoj i poprečnoj opruzi). Refleksija valova od oslonaca mijenja disperziju valova na način da slobodni valovi koji imaju prostorne harmonijske valove s faznim brzinama većim od brzine zvuka (fleksijskih valova) u materijalu mogu propagirati na nižim frekvencijama od kritične frekvencije neukrepljenog panela. Navedene komponente uzrokuju da panel bude pobuđen na koincidentan način s incidentnim zvučnim valovima na frekvencijama nižim od kritične.

Na slici 3.5 analiziran je utjecaj upadnog kuta na zvučne transmisijske gubitke panela  $TL$ . Zvučni transmisijski gubici izračunati su za 3 različita upadna kuta:  $15^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $70^\circ$ . Na slici 3.5 se vidi da se  $TL$  smanjuje s rastom upadnog kuta što se može objasniti povećavanjem  $x$  komponente broja prisilnog vala  $k_x$  pa dolazi do većeg pobuđivanja fleksijskih valova tj. do veće radijacije zvuka.



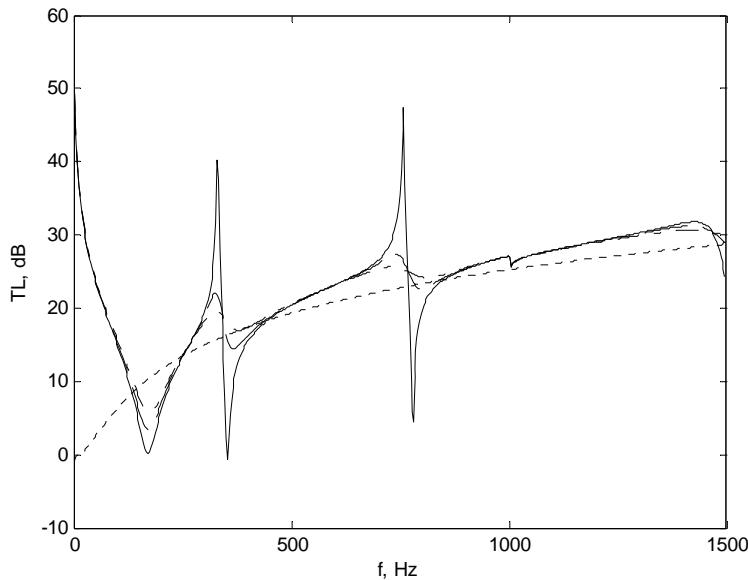
Slika 3.5 Utjecaj upadnog kuta  $\vartheta$  na  $TL$  za periodički oslonjen panel:  $\vartheta_1=15^\circ$  ———,  $\vartheta_2=45^\circ$  ----- i  $\vartheta_3=70^\circ$  .....

Na slici 3.6 prikazan je utjecaj faznog prigušenja. Prikazane su 3 krivulje  $TL$ -a za 3 različita fazna prigušenja  $0^\circ$ ,  $1^\circ$  i  $10^\circ$ . Potrebno je primjetiti da odabir koeficijenta faznog prigušenja utječe na rješenje u većem iznosu samo u niskom frekvencijskom pojasu.

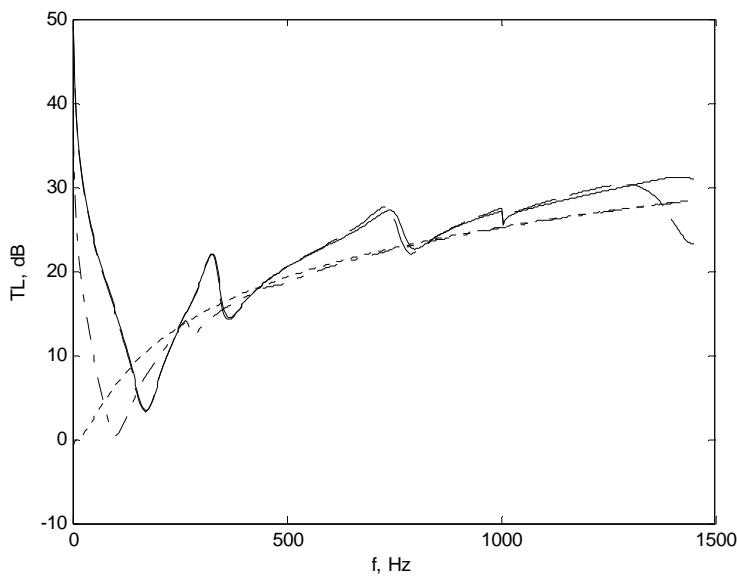


Slika 3.6 Utjecaj koeficijenta faznog prigušenja  $\psi$  na  $TL$  za periodički oslonjen panel:  $\psi_1=0^\circ$ ,  $\psi_2=1^\circ$  ----- i  $\psi_3=10^\circ$  .....

Na slici 3.7 prikazan je utjecaj prigušenja u materijalu panela na krivulju  $TL$ . Iz slike 3.7 je vidljivo da prigušenje u materijalu panela poboljšava  $TL$  krivulju pa se u praksi za poboljšanje  $TL$ -a često koriste razne površinska obrada panela (eng. *coating*). Potrebno je primjetiti da se s povećanjem prigušenja fleksijskih valova na cijeloj površini panela postiže poboljšani  $TL$  na cijelom frekvencijskom spektru, osobito u frekvencijskim pojasima oko rezonancija.



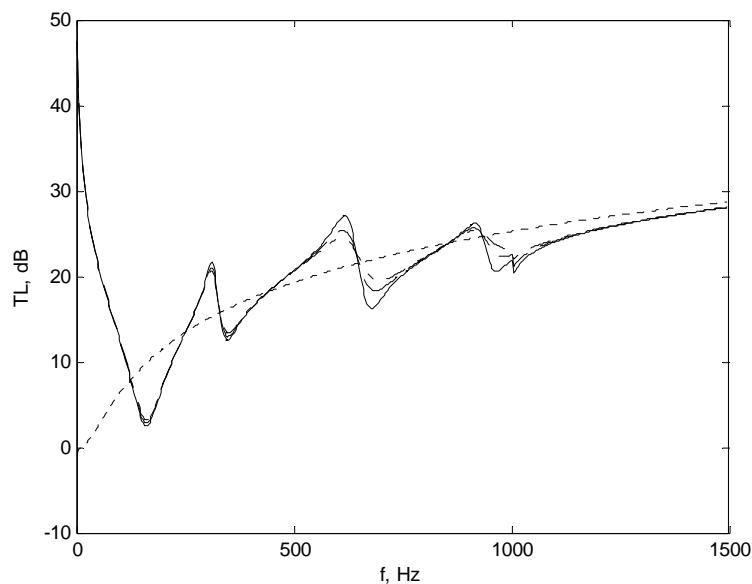
Slika 3.7 Utjecaj prigušenja u panelu  $\eta$  na  $TL$  za periodički oslonjeni panel:  $\eta_1=0$  ——,  $\eta_2=0,1$  ----- i  $\eta_3=0,2$  -.-.-.- i  $TL$  za neoslonjeni panel .....



Slika 3.8 Utjecaj krutosti poprečne opruge u osloncu  $K_t$  na  $TL$  beskonačnog periodički oslonjenog panela:  $K_{t1}=3,6 \cdot 10^9$  ——,  $K_{t2}=3,6 \cdot 10^7$  -----,  $K_{t3}=3,6 \cdot 10^5$  -.-.-.- i  $K_{t4}=0$  .....

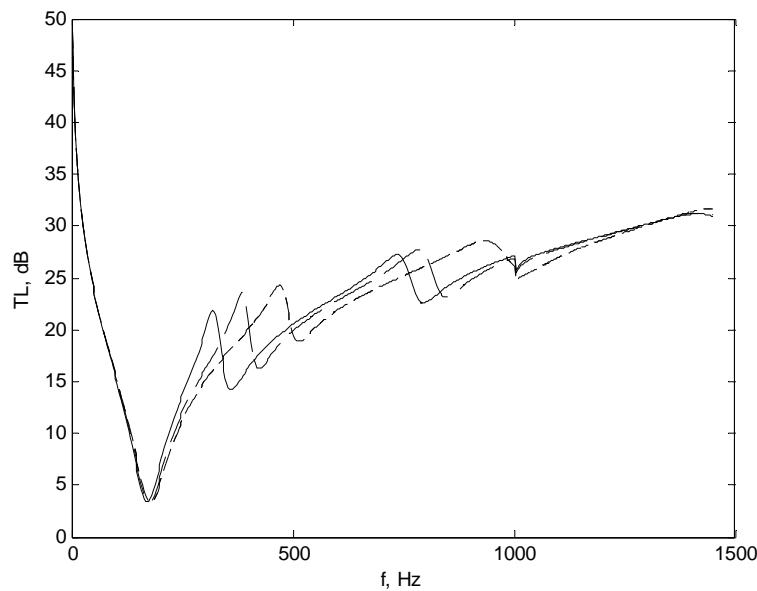
Pozitivan utjecaj krutosti poprečne opruge vidljiv je u niskom frekvencijskom pojasu (slika 3.8) kad je krutost poprečne opruge niža od granične (za osnovne parametre:  $K_t = 7,1 \cdot 10^7$  N/m) iznad koje se oslonci prestanu poprečno gibati tj. postaju jednostavnii oslonci.

Utjecaj prigušenja poprečne opruge u osloncima vidljiv je ukoliko krutost poprečne opruge dozvoljava poprečne pomake u osloncima (slika 3.7). Postoji granična krutost poprečne opruge iznad koje prigušenje poprečne opruge više nema utjecaja na odziv jer se greda u osloncima više niti ne giba poprečno već se oslonac ponaša kao jednostavan oslonac. Utjecaj prigušenja je veći na višim frekvencijama.



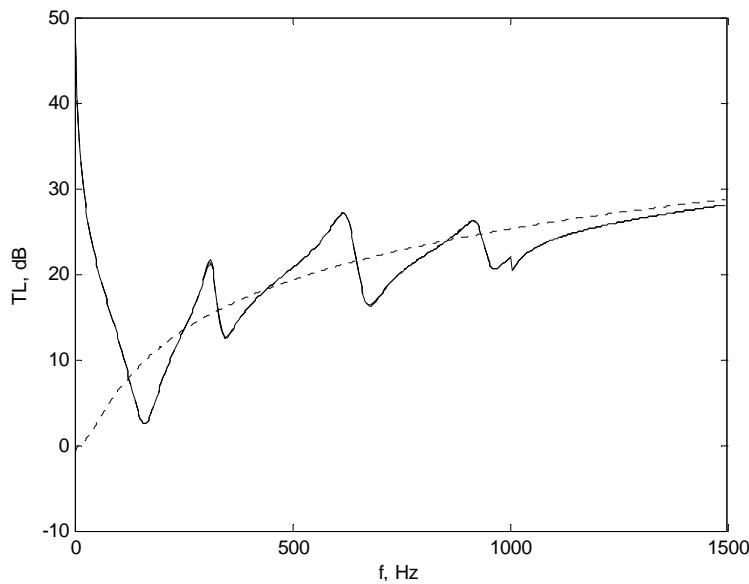
Slika 3.9 *Utjecaj prigušenja poprečne opruge u osloncu  $\eta_t$  na TL za periodički oslonjeni panel uz dozvoljene poprečne pomake tj.  $K_t=3,6 \cdot 10^6$  :  $\eta_{t1}=0$  ———,  $\eta_{t2}=0,1$  -----,  $\eta_{t2}=0,2$  -.-.-.- i TL za neoslonjeni panel ..... .*

Krutost fleksijske opruge, kako je već prikazano na slici 2.15, povisuje frekvencije vlastitog gibanja osim na gornjim graničnim frekvencijama propagacijskih pojasa gdje je zakret u osloncima jednak nuli pa krutost fleksijske opruge nema utjecaja jer nema ni zakreta.

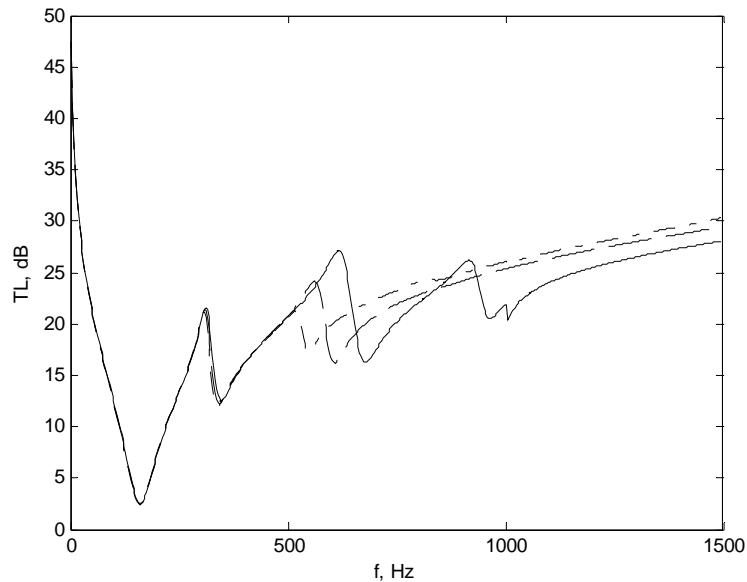


Slika 3.10 Utjecaj krutosti fleksijske opruge u osloncu  $K_r$  na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela:  $K_{r1}=0$  ———,  $K_{r2}=10^3$  -----,  $K_{r3}=10^6$  -.-.-.-.- i  $K_{r4}=10^9$  .... (krivulje  $TL_{kr3}$  i  $TL_{kr4}$  se preklapaju)

Prigušenje fleksijske opruge u osloncu nema primjetnog utjecaja kad su omogućeni poprečni pomaci u osloncima.

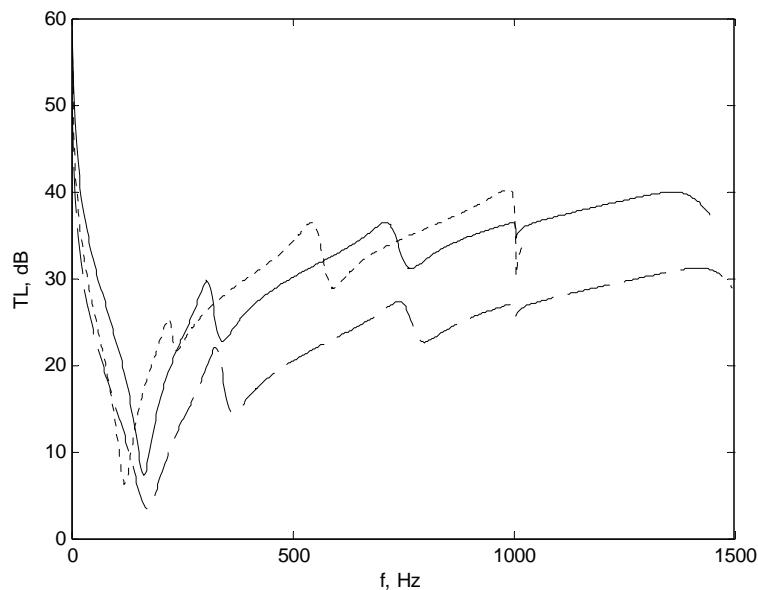


Slika 3.11 Utjecaj prigušenja fleksijske opruge u osloncu  $\eta_r$  na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela uz dozvoljene poprečne pomake tj.  $K_t=3,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ :  $\eta_{r1}=0$  ———,  $\eta_{r2}=0,1$  -----,  $\eta_{r2}=0,2$  -.-.-.-.- i TL za neoslonjeni panel ....



Slika 3.12 Utjecaj mase pomičnog dijela oslonca  $M$  na  $TL$  beskonačnog periodički oslonjenog panela uz dozvoljene poprečne pomake tj.  $K_t = 3,6 \cdot 10^6$ :  $m_{M1}=0$  kg ———,  $m_{M2}=0,1$  kg -----,  $m_{M3}=0,2$  kg .....

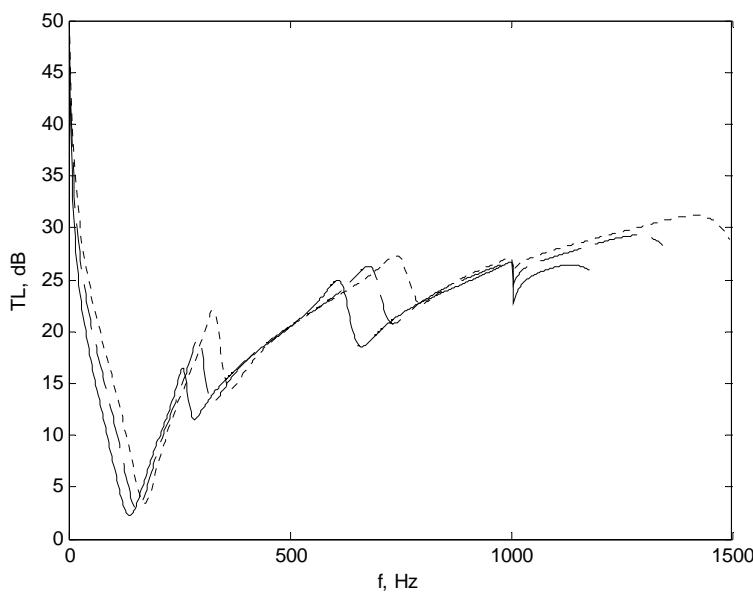
Masa pomičnog dijela oslonca ima pozitivan utjecaj na  $TL$  kad je omogućeno poprečno gibanje oslonaca (slika 3.12.). Očito je da ona povoljno djeluje na odziv jer s njenim rastom raste ukupna masa pregrade što je uvijek povoljno za  $TL$ .



Slika 3.13 Utjecaj materijala panela na  $TL$  beskonačnog periodički oslonjenog panela: čelik ( $\rho=7750$  kg/m $^3$ ,  $E=1,9 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\nu=0,3$ ) ———, aluminij ( $\rho=2700$  kg/m $^3$ ,  $E=0,71 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\nu=0,33$ ) -----, bronca ( $\rho=8500$  kg/m $^3$ ,  $E=1,04 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\nu=0,37$ ) .....

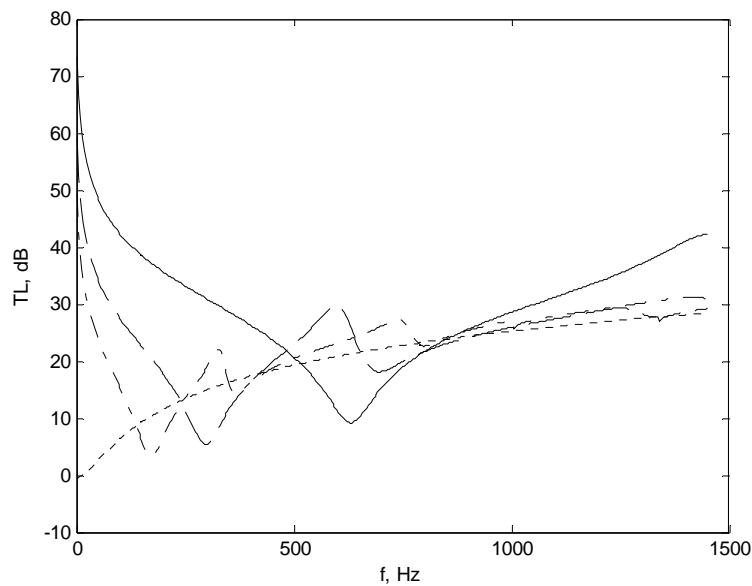
Odabir materijala od kojeg će se napraviti panel ima odlučujući utjecaj na *TL* krivulju. Na slici 3.13 prikazane su *TL* krivulje za čelik, aluminij i broncu. Vidljivo je da je *TL* bronce sličnih veličina kao *TL* čelika u srednjem frekvencijskom pojasu (250Hz - 1000Hz). Iznad 750 Hz bronca ima najveći *TL*. Navedeno je i očekivano zbog veće gustoće bronce pa to čini najefikasnijom u frekvencijskom pojasu koji je kontroliran masom. Na slici 3.13 se također vidi da je aluminij, koji ima najmanju krutost, najmanje efikasan u niskom frekvencijskom pojasu u kojem se *TL* kontrolira s krutošću.

Promjena debljine panela ima utjecaj na cijelom frekvencijskom spektru *TL*-a (slika 3.14). U općem slučaju, *TL* se primjetno poboljšao u niskom frekvencijskom pojasu, ili u pojasu kontroliranom s krutošću, dok je u visokom frekvencijskom pojasu, gdje je *TL* kontroliran masom, ostao sličnih vrijednosti s time da su se pomakle frekvencije rezonancija. Kao i u analizi utjecaja krutosti u opruzi u osloncu, povećanje krutosti povećava *TL* u niskom frekvencijskom pojasu dok je za visoki frekvencijski pojas potrebno koristiti druge alate, kao što su apsorpcijski materijali.



Slika 3.14 Utjecaj debljine panela  $h$  na *TL* beskonačnog periodički oslonjenog panela:  $h_1=1$  mm ———,  $h_2=1,14$  mm -----,  $h_3=1,27$  mm .....

Umanjivanjem udaljenosti između oslonaca povećava se *TL* u niskom frekvencijskom pojasu, međutim navedeno uzrokuje velike oscilacije *TL*-a po cijelom frekvencijskom spektru. Razlog se može opisati usporedbom radijacije jednog velikog panela i puno malih panela jedake ukupne površine površini velikog panela.

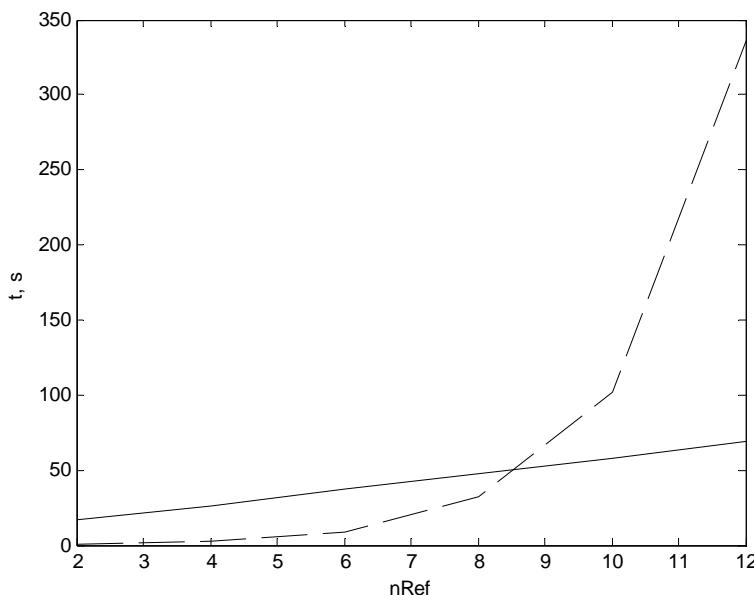


Slika 3.15 Utjecaj udaljenosti između oslonaca  $L$  na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela:  $L_1=100$  mm ———,  $L_2=150$  mm -----,  $L_3=200$  mm .....

$TL$  malog panela je manji od  $TL$ -a većeg panela ako su paneli od istog materijala pa slijedi da je  $TL$  sume malih panela isto manji od  $TL$ -a većeg panela. Slijedi da je situacija to nepovoljnija što je više malih panela do čega dolazi s povećavanjem broja oslonaca tj. sa smanjivanjem udaljenosti između oslonaca uz istu ukupnu površinu. Udaljenost između oslonaca određuje se iz optimuma između efikasnosti na cijelom radnom frekvencijskom spektru i  $TL$ -u u niskom frekvencijskom pojasu.

### 3.3.3. Brzina izračuna pomoću metode virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova za izračun slobodnih vibracija

Broj prostornih harmonijskih valova koji su potrebni da bi se izračunalo približno rješenje  $TL$ -a utječe na brzinu rješavanja pomoću metode virtualnog rada jer s većim brojem prostornih harmonijskih valova raste broj elemenata u matricama izračuna s kvadratom broja prostornih harmonijskih valova.



Slika 3.16 *Usporedba brzine određivanja amplitude prostornih harmonijskih valova pri zadanoj frekvenciji neprigušenih slobodnih vibracija pomoću metode virtualnog rada* \_\_\_\_\_ *i Fourierovog razvoja u red - - - - - .*

nRef	Fourierov razvoj	Virtualni rad
2	16,8	0,84
4	26,6	2,5
6	37	9
8	47,4	32,23
10	58,1	101,42
12	69,2	335,7

Tablica 3.1 *Vrijeme u sekundama potrebno za izračun amplituda prostornih harmonijskih valova sa slike 3.16*

U dijagramu na slici 3.16 prikazana je usporedba brzine izračuna amplituda prostornih harmonijskih valova pomoću metode virtualnog rada i pomoću Fourierovog razvoja u red po izrazu (2.76) iz koje je očito da je metoda virtualnog rada sporija od metode Fourierovog razvoja u red iznad sjecišta prikazanih krivulja. U slučaju dodavanja prigušenja u sustav sjecište će se pojaviti na nižoj vrijednosti  $n_{\text{Ref}}$ .

### 3.3.4. Izračun vlastitih frekvencija slobodnih vibracija periodički oslonjene grede

Vlastite frekvencije slobodnih vibracija periodički oslonjene grede jednake su vlastitim frekvencijama jednostrukih gredu oslonjene na dva jednostavna oslonca i na dva uklještena oslonca (odlomak 2.2.1.1.). Iz navedene činjenice i postojećih izraza za izračun vlastitih vibracija jednostrukih gredu po Rayleigh-Ritz metodi [75] provjereni su rezultati dobiveni pomoću rubnih uvjeta i općeg rješenja za diferencijalnu jednadžbu gibanja i metode virtualnog rada uz virtualni pomak definiran s prostornim harmonijskim valovima.

Po metodi Rayleigh-Ritz-a za slobodno oslonjenu gredu dobivene su vlastite frekvencije iz izraza (3.1) [75]

$$\omega_n = a_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (3.1)$$

gdje je  $a_n$  koeficijent koji ima različite vrijednosti za  $n$ -ti vlastiti oblik vibriranja:

$a_{1s}=\pi^2=9,87$	-	1. vlastiti oblik vibriranja
$a_{2s}=4\pi^2=39,48$	-	2. vlastiti oblik vibriranja
$a_{3s}=9\pi^2=88,83$	-	3. vlastiti oblik vibriranja
$a_{4s}=16\pi^2=157,91$	-	4. vlastiti oblik vibriranja, itd.

Po istoj metodi i istom izrazu mogu se odrediti i vlastite frekvencije za gredu koja je uklještena na oba kraja ali onda koeficijent  $a_n$  ima druge vrijednosti:

$a_{1u}=22$	-	1. vlastiti oblik vibriranja
$a_{2u}=61,7$	-	2. vlastiti oblik vibriranja
$a_{3u}=121$	-	3. vlastiti oblik vibriranja
$a_{4u}=200$	-	4. vlastiti oblik vibriranja, itd.

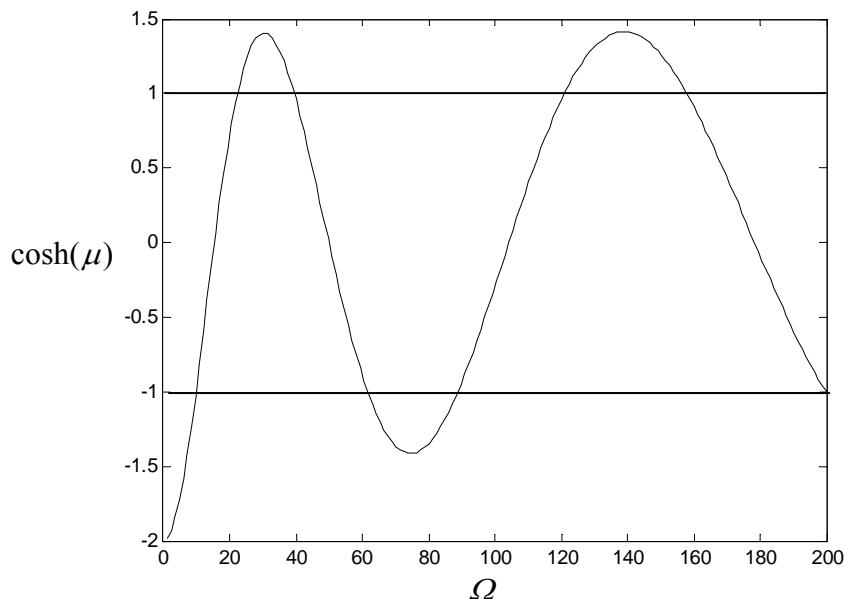
Vrijednosti koeficijenta  $a_n$  slične su vrijednostima parametra frekvencije  $\Omega$  (2.35).

Donja granična frekvencija  $n$ -tog propagacijskog frekvencijskog pojasa beskonačne periodički oslonjene grede jednaka je  $n$ -toj vlastitoj frekvenciji grede slobodno oslonjene na oba kraja dok je gornja granična frekvencija jednaka  $n$ -to vlastitoj frekvenciji grede uklještena na oba kraja pa slijedi usporedba vrijednosti koeficijenta  $a_n$  i vrijednosti parametra frekvencije  $\Omega$  koristeći metode za određivanje graničnih frekvencija propagacijskih frekvencijskih pojasa beskonačne periodički oslonjene ploče.

$\Omega_{dg1pp}=10,07$	$a_{1s}=\pi^2=9,87$
$\Omega_{gg1pp}=22,4$	$a_{1u}=22$
$\Omega_{dg2pp}=39,71$	$a_{2s}=4\pi^2=39,48$
$\Omega_{gg2pp}=61,71$	$a_{2u}=61,7$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{dg3pp} &= 89,04 & a_{3s} &= 9\pi^2 = 88,83 \\
 \Omega_{gg3pp} &= 120,91 & a_{3u} &= 121 \\
 \Omega_{dg4pp} &= 158,15 & a_{4s} &= 16\pi^2 = 157,91 \\
 \Omega_{gg4pp} &= 199,88 & a_{4u} &= 200
 \end{aligned}$$

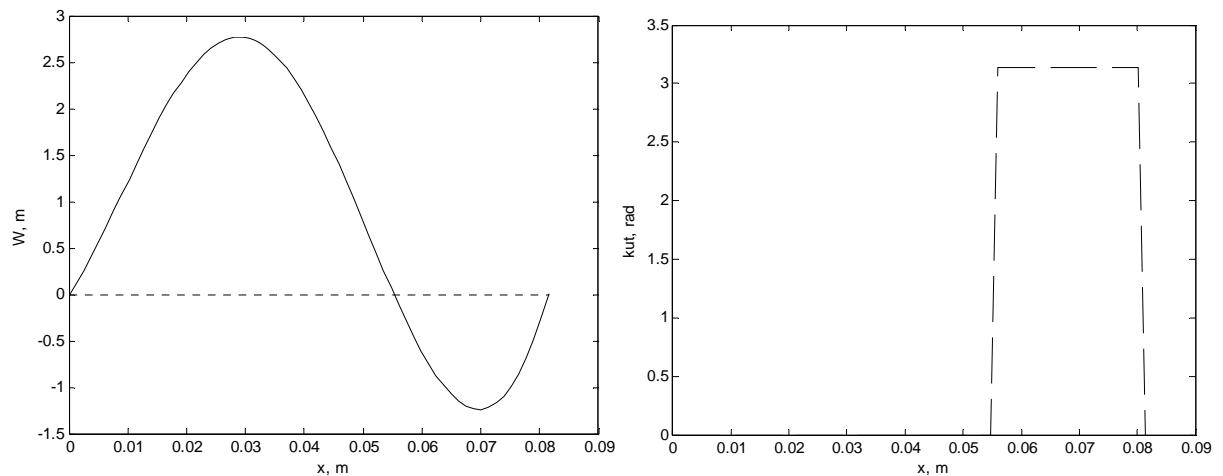
Na slici 3.17 prikazana je krivulja ovisnosti vrijednosti hiperbolnog kosinusa propagacijske konstante  $\cosh(\mu)$  o parametru  $\Omega$  iz koje su očitane granične vrijednosti parametra frekvencije  $\Omega$  kod  $\cosh(\mu)=1$  i  $\cosh(\mu)=-1$ .



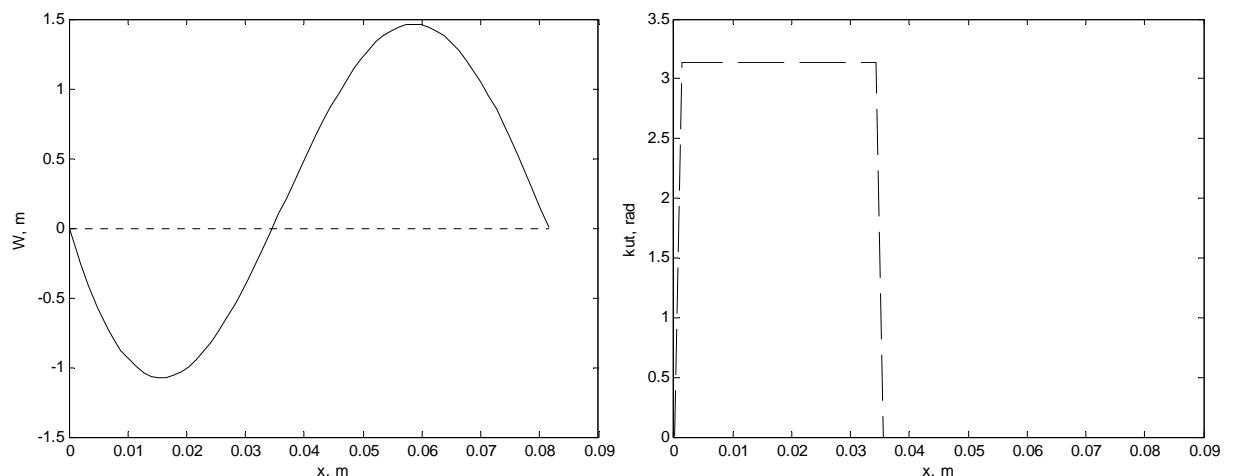
Slika 3.17 Krivulja ovisnosti vrijednosti hiperbolnog kosinusa propagacijske konstante  $\cosh(\mu)$  o parametru frekvencije  $\Omega$

### 3.3.5. Usporedba oblika vibriranja slobodnih vibracija

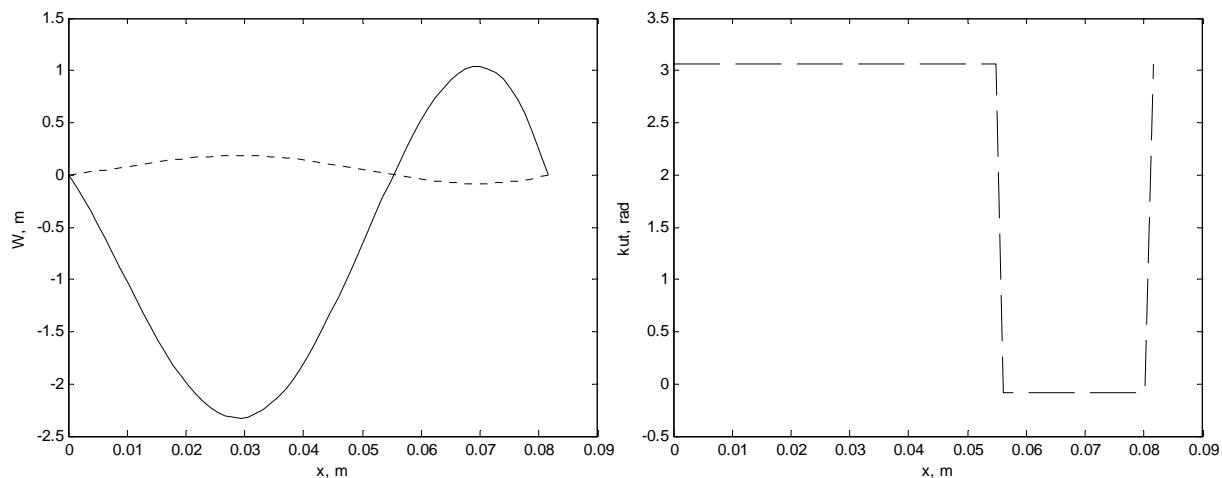
U ovom odlomku su opisani rezultati izračuna nove funkcije oblika slobodnih vibracija (2.44) periodički oslonjene beskonačne grede. Na slikama 3.18, 3.19 i 3.20 uspoređen je njezin oblik s funkcijom oblika (2.45) [33] i oblikom vibriranja izračunatim po metodi virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova.



Slika 3.18 Izgled realne \_\_\_\_\_ i imaginarne ----- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede (desno) po novoj funkciji oblika (2.44)



Slika 3.19 Izgled realne \_\_\_\_\_ i imaginarne ----- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede (desno) po funkciji oblika (2.45) [33]

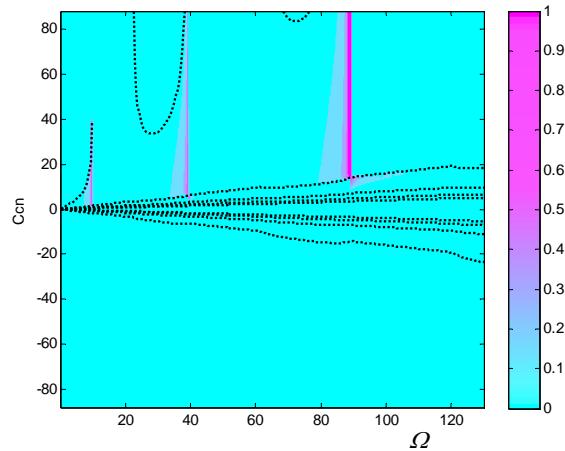


Slika 3.20 Izgled realne \_\_\_\_\_ i imaginarne ----- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede po metodi virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova (desno)

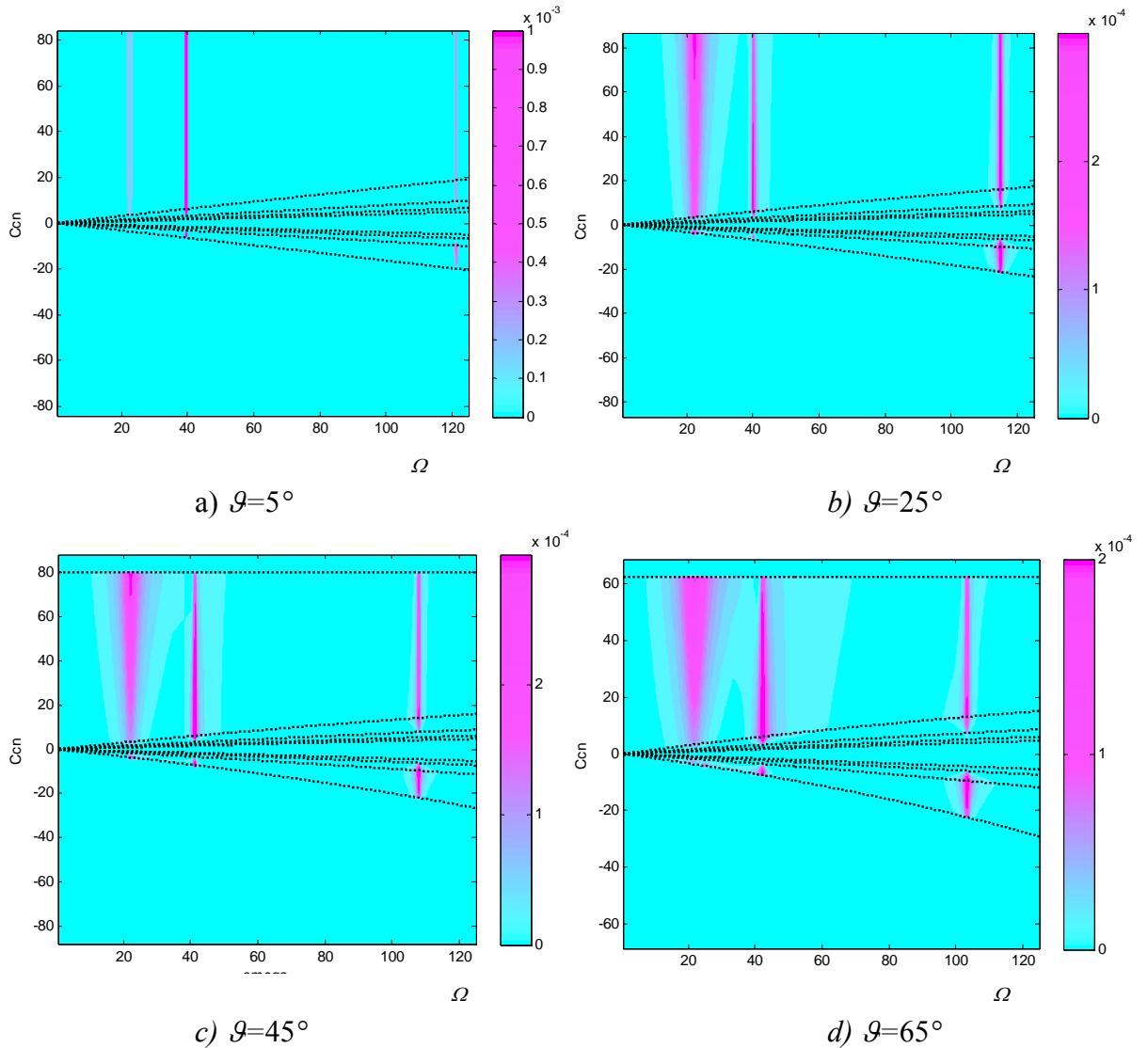
Iz slika 3.18.-3.20. je vidljivo podudaranje novog oblika, na slici 3.18 s rješenjem po metodi virtualnog rada a na slici 3.20 , čime je potvrđena njegova točnost (uz izvod u odlomku 2.2.2).

### 3.3.6. Dijagram za analizu slobodnih i prisilnih vibracija

S ciljem jasnijeg praćenja akustičkog odziva opisanog pomoću prostornih harmonijskih valova osmišljen je dijagram na slici 3.21 (odломak 2.2.2.5.3.). Na apscisi dijagrama nalazi se frekvencija a na ordinati fazna brzina. Krivulje prikazane na dijagramu definiraju fazne brzine pojedinih prostornih harmonijskih valova koje postoje na zadanoj frekvenciji. Amplitude valova izražene su bojom. Slijedi da su osnovni parametri za praćenje akustičkog odziva opisanog s redom prostornih harmonijskih valova, a to su  $n$ -ti broj vala, fazna brzina vala  $c_n$  i amplituda vala  $A_n$  za pojedinu frekvenciju, vidljivi odjednom na dijagramu pa je moguće lagano pratiti kako se navedene varijable mijenjaju pri promjeni pojedinih utjecajnih varijabli, npr. upadnog kuta prisilnog vala (slika 3.22).



Slika 3.21 Slobodne vibracije panela definirane s grupom prostornih harmonijskih valova



Slika 3.22 Akustički odziv panela na razne upadne kuteve: a)  $\theta=5^\circ$ , b)  $\theta=25^\circ$ , c)  $\theta=45^\circ$  i d)  $\theta=65^\circ$  definiran s grupom prostornih harmonijskih valova

### 3.3.7. Usporedba izračunatih vrijednosti zvučnih transmisijskih gubitaka konačnog panela s metodom virtualnog rada i metodom konačnih elemenata

U sklopu ove disertacije za izračun zvučnog transmisijskog gubitka korišten je računalni program ACTRAN (eng. *ACoustic TRANsmision*) koji se bazira na metodi konačnih elemenata. Točnost izračuna pomoću metode konačnih elemenata može se smatrati visokom ukoliko je pri diskretizaciji panela maksimalna dimenzija konačnog elementa najmanje 6 puta manja od polovice valne duljine fleksijskog vala u panelu. Uz navedenu preporuku potrebno je i provjeriti konvergenciju. Očito je da je ograničenje ove metode frekvencijski pojas izračuna s obzirom da pri rastu broja konačnih elemenata raste i vrijeme samog izračuna pa su rezultati uspoređeni na užem frekvencijskom pojasu.

Interesantno je spomenuti da je način izračuna radijacije jednak izračunu koji je opisan u ovom radu tj. koristi se Rayleigh-ov integral (odломak 2.5.2). Razlika je u definiciji difuznog polja i gibanja panela.

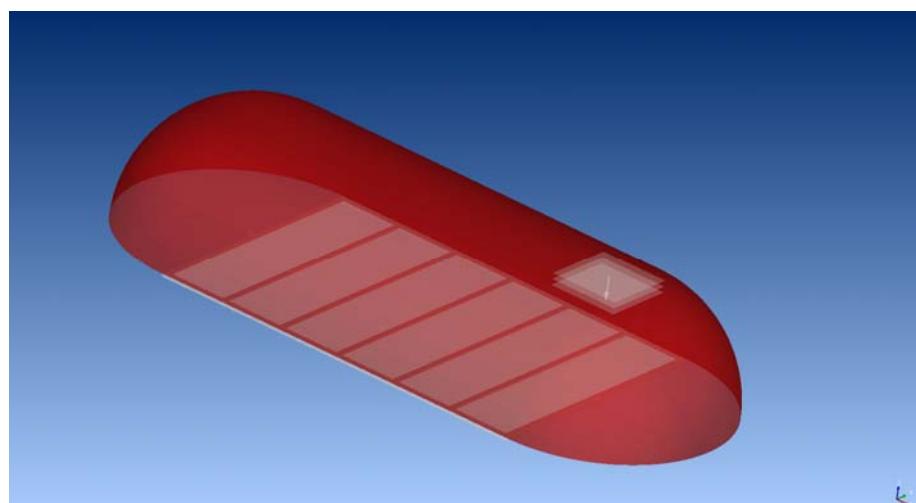
Za referentni primjer odabran je model dimenzija jednakih dimenzijama eksperimentalnog modela:

Panel (ploča od mesinga)

- materijal panela: mesing
- modul elastičnosti  $E = 1,11 \cdot 10^{11}$  Pa
- gustoća  $\rho = 9090$  kg/m<sup>3</sup>
- Poisson-ov koeficijent  $\nu = 0,37$
- širina panela  $a_D = 489$  mm
- visina panela  $b_D = 303$  mm
- debljina panela  $h = 0,5$  mm

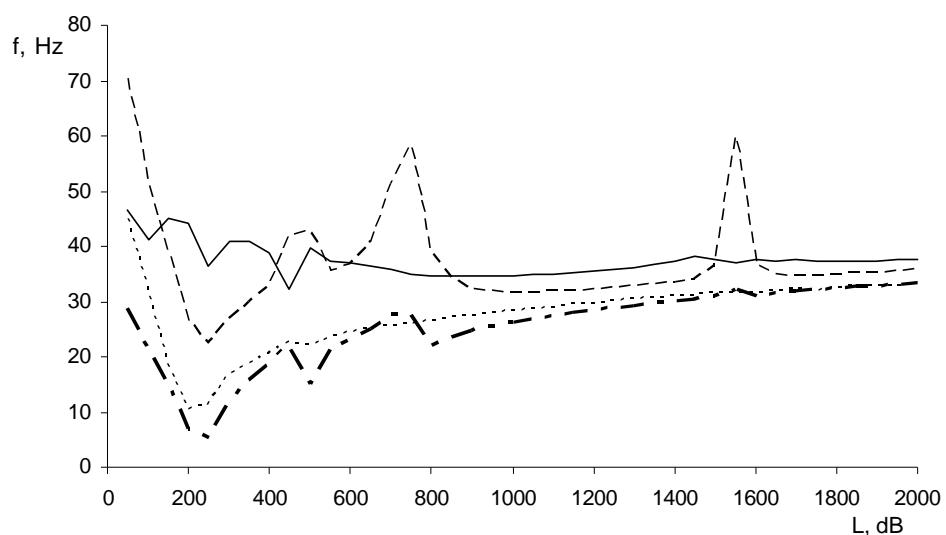
Oslonci:

- materijal elastičnog oslonca (zvuko-izolirajuća brtva za ugradnju pregrada od Knaufa)
- modul elastičnosti  $E = 150000$  Pa
- gustoća  $\rho = 46$  kg/m<sup>3</sup>
- Poisson-ov koeficijent  $\nu = 0,49$
- širina brtve 9 mm
- visina brtve 3,2 mm
- udaljenost između oslonaca  $L = 81,5$  mm
- broj prostornih perioda panela  $n_p = 6$
- broj oslonaca 5 + oslonci na vanjskom rubu po širini i visini panela



Slika 3.23. Model konačnih elemenata akustičkog odziva konačnog periodički oslonjenog panela

Na slici 3.24 prikazan je usporedni dijagram rezultata zvučnih transmisijskih gubitaka po metodi virtualnog rada s ograničenjem upadnog kuta na beskonačni panel ( $\vartheta_{lim} = 72^\circ$ ) i s primjenom metode prostornog isječka i rezultata s metodom konačnih elemenata u računalnom programu Actran.



Slika 3.24 Rezultati zvučnih transmisijskih gubitaka: a) metoda virtualnog rada  $\vartheta_{lim} = 72^\circ$  -.-., b) metoda virtualnog rada i metoda prostornog isječka -----, metoda konačnih elemenata, Actran c) 3D difuzno polje ..... i d) 2D difuzno polje \_\_\_\_\_.

Vrijednosti zvučnog transmisijskog gubitka izračunate s računalnim programom Actran imaju niže vrijednosti jer se u istom koristilo 3D difuzno polje za pobudu dok se u ostala 2 izračuna koristilo 2D difuzno polje. 3D difuzno polje uključuje zadavanje upadnih

kuteva od  $0\text{-}90^\circ$  u poprečnoj ravnini na 2D difuzno polje. Povećani upadni kutevi znače i manji TL.

Vrijednosti zvučnog transmisijskog gubitka izračunate s metodom virtualnog rada za beskonačnu gredu uz ograničavanje upadnog kuta na  $72^\circ$  pokazalo je dobro podudaranje u srednjem i viskom frekvencijskom pojasu dok u niskom frekvencijskom pojasu dolazi do većih razlika što je uzrokovano zanemarivanjem efekta difrakcije i normalnih oblika vibriranja koji slijede iz konačnih dimenzija greda.

Vrijednosti zvučnog transmisijskog gubitka izračunate s metodom virtualnog rada i metodom prostornog isječka imaju primjetno uvećane rezultate na niskim frekvencijama što je i očekivano zbog same prirode metode što je objašnjeno u poglavljju 2.5.1. Frekvencijski pojas iznad kojeg se metoda može koristiti uključuje da valna duljina odziva panela bude manja (preporuka i za red veličine) od udaljenosti između oslonaca što se za zadane dimenzije panela dogodi na oko 1000Hz.

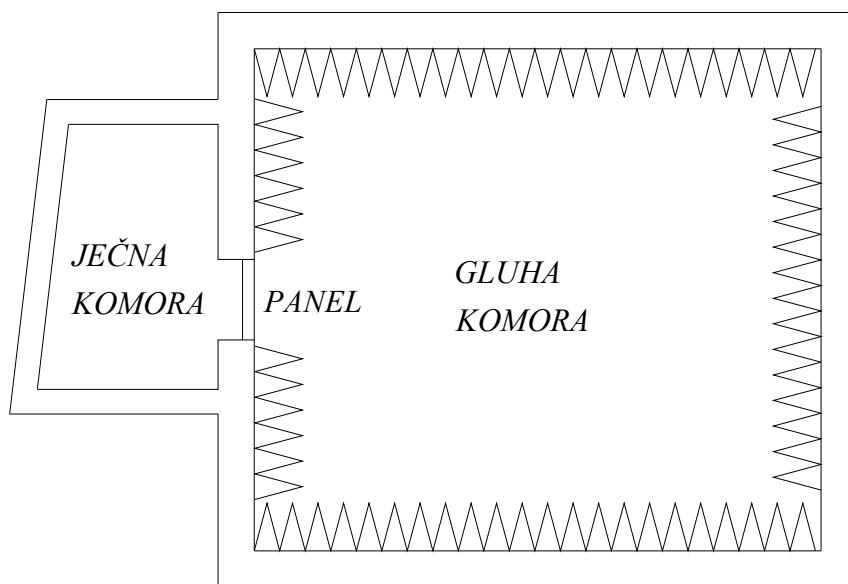
## Poglavlje 4.

### 4. Eksperimentalna analiza

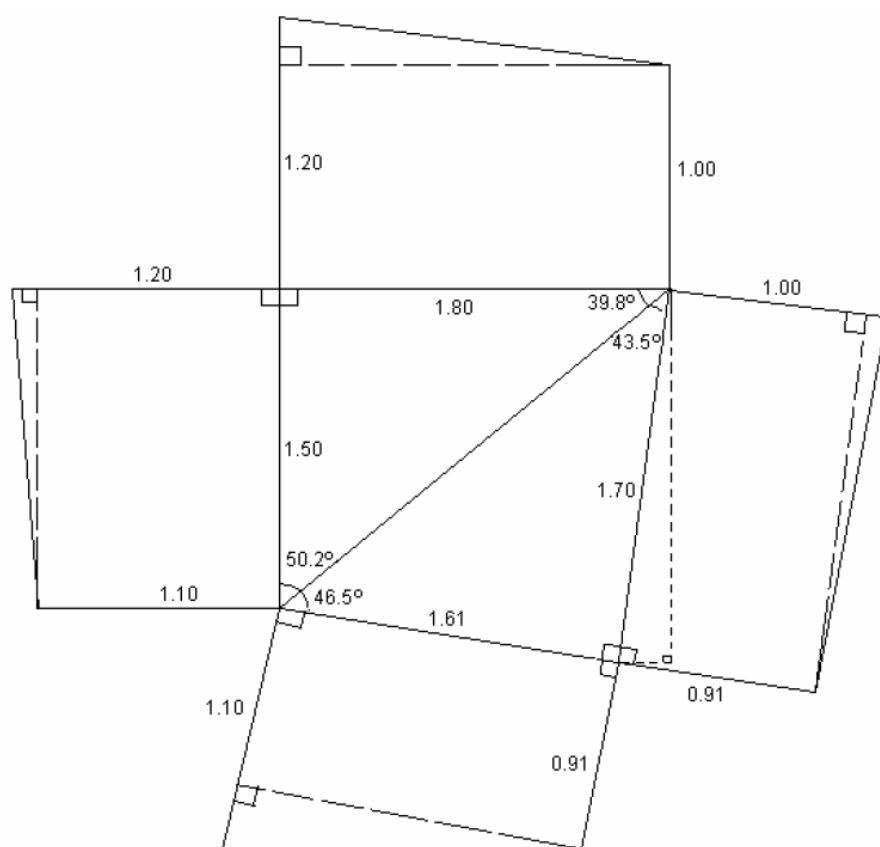
U ovom odlomku opisana je i prezentirana priprema za eksperimentalna mjerena i rezultati  $TL$  mjerena, koji su potrebni kako bi se potvrdila točnost numeričkih rezultata. Eksperimentalni model za mjerena ima dvije prostorije: ječnu i gluhu komoru. Ječna komora napravljena je prema članku [77], dok su dimenzije gluhe komore odabrane s ciljem minimiziranja broja frekvencija normalnih modova prostorije s bliskim veličinama. Između navedenih prostorija je otvor u zidu s okvirom na kojeg su pričvršćeni testni paneli. Zvuk se generira u ječnoj komori te se iz razlike usrednjene razine zvučnog tlaka u ječnoj i gluhoj komori izračunava zvučni transmisijski gubitak  $TL$ .

#### 4.1. Opis eksperimentalnog modela

Na slici 4.1 prikazan je tlocrt eksperimentalnog modela koji se sastoji od gluhe komore volumena  $23,15 \text{ m}^3$  i ječne komore volumena  $2,86 \text{ m}^3$  s neparalelnim ravnim stranicama i prozora u koji je ugrađen panel.



Slika 4.1 Tlocrt eksperimentalnog modela za mjerjenje koeficijenta transmisije zvučne snage  $TL, dB$



Slika 4.2 Dimenzije i oblik stijenki jećne komore

#### 4.1.1. Ječna komora

Dimenzije i oblik stijenki ječne komore prikazane su na slikama 4.2 i 4.3. U članku [77] stijenke su napravljene od šperploče debljine 12 mm jer je ječna komora pomična dok je za ova eksperimentalna mjerena izrađena nepomična komora s masivnijim i glatkim stijenkama s ciljem veće refleksije (4 stijenke su cigleni zidovi dok su 2 stijenke sendviči od MDF-a (eng. *medium density fiber*) i pjeska). Na unutarnjim površinama ječne komore postavljene su keramičke pločice. Prosječna debljina stijenki je 15cm.



Slika 4.3 Izgled ječne komore

#### 4.1.2. Gluha komora

S obzirom da se numerički izračun temelji na nepostojanju refleksija na transmisijskoj strani panela bilo je potrebno izgraditi gluhi komoru. Radi se o prostoriji oblika kvadra čije su dimenzije ( $3,45\text{ m} \times 3,05\text{ m} \times 2,2\text{ m}$ ) a koje su određene računalnim programom RoomOptimizer s ciljem dobivanja što ravnomjernijeg odziva akustičkog polja. Da bi se spriječile refleksije valova od stijenki prostorije sve stijenke gluhe komore obložene su s 3 sloja 80 mm Knauf Insulation akustičnih ploča kamene vune s crnim voalom APS GVB, slika 4.4.



Slika 4.4 Slojevi kamene vune u gluhoj komori

#### 4.1.3. Zid između ječne i gluhe komore

Između ječne i gluhe komore nalazi se cigleni zid koji zajedno sa žbukom ima debljinu oko 28 cm. U zidu je prozor s okvirom (489 mm × 303 mm) u koji je ugrađen panel. Moguće je koristiti odvojeno ječnu i gluhu komoru kad se otvor u potpunosti zatvori pomoću skidljive teške betonske ploče uz potpuno brtvljenje (slika 4.5).



Slika 4.5 Izgled zatvorenog prozora (lijevo: pogled sa strane ječne komore, desno: pogled sa strane gluhe komore)

U zid su ugrađena i dupla vrata od MDF-a 22 mm i kamene vune (slika 4.6).



Slika 4.6 *Dupla vrata između gluhe komore i prostora oko ječne komore*

#### 4.1.4. Okvir panela

Za eksperimentalna mjerjenja napravljene su dvije vrste testnih okvira. S prvom vrstom testnog okvira, slika 4.7 , ostvario se rubni uvjet uklještenja po vanjskim rubovima panela koji se može promijeniti u polukruti oslonac uz dodavanje brtvi.



Slika 4.7 *Okvir za vanjski rub panela*

Sa drugom vrstom testnog okvira, slika 4.8 , ostvario se rubni uvjet jednosmjerne periodičke oslonjenosti panela.



Slika 4.8 Periodički okvir za panel

Na periodičkom okviru za panel udaljenost simetrale oslonaca iznosi 81,5 mm a visina otvora okvira je 303 mm. Panel se sastoji od ukupno 6 perioda panela tj. prostora omeđenih s okvirima. Između okvira i panela ugrađeno je više elastičnih brtvi s različitim modulima elastičnosti i prigušenjima. U biti napravljen je stezni okvir od dvije rešetke između kojih se nalaze graničnici (prsteni) koji definiraju silu u brtvi. Promjenom dimenzije graničnika mijenja se sila kojom stezni okvir s brtvom steže panel. Na taj način postignut je ujednačen rubni uvjet po cijelom okviru.

#### 4.2. Mjerna oprema

Za mjerjenje je korištena zvučna kartica ROGA Plug.n.DAQ (USB Front-End s Win driverima, 2 kanala, IEEPE power 24V/4mA, 16 bit), dva mikrofona Brüel&Kjaer Type 4189 (Prepolarized Free-field  $\frac{1}{2}$ ") i omnodirekcijski zvučnik (slika 4.9 ).

Za analizu izmjerениh podataka koristio se računalni program ARTA [80].



Slika 4.9 Mjerna oprema (mjerna kartica, mikrofon i omnodirekcijski zvučnik redom)

### 4.3. Rezultati mjerjenja referentnih fizikalnih veličina

Cilj mjerjenja je definirati fizikalne veličine koje su ulazni parametri za numerički izračun kao i fizikalne veličine koje se mogu usporediti s rezultatima numeričkog izračuna. Ulagani parametri za numerički izračun dijele se na parametre vezane uz panel i elastične oslonce od kojih će se za neke definirati i njihova ekvivalentna vrijednost.

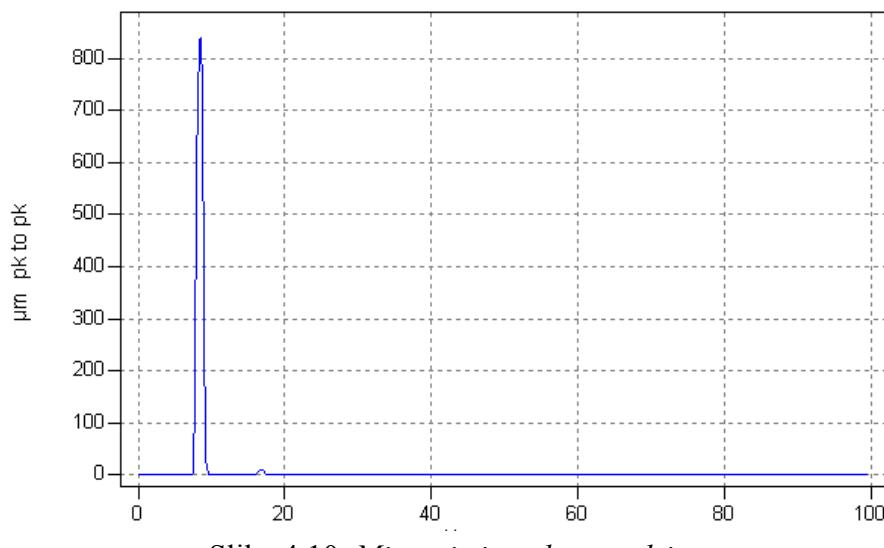
#### 4.3.1. Panel

Za panel je odabrana tanka ploča od mesinga dimenzija  $0,498 \times 0,321 \times 0,0005$  m. Gustoća panela odredila se po izrazu

$$\rho = \frac{m_{UK}}{V} = \frac{0,713}{0,498 \cdot 0,321 \cdot 0,0005} = 9090 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

gdje je  $m_{UK}$  masa panela a  $V$  volumen panela.

Poissonov koeficijent materijala panela odabran je iz dostupne literature  $\nu=0,37$  za materijal mesing. Potrebno je primjetiti da je temeljni model beskonačan i da period grede ima malu debljinu u odnosu na udaljenost između oslonaca i time spada pod grede za koje se Poissonov koeficijent ne koristi. Međutim s obzirom da se model beskonačne grede koristi za opisivanje konačnog duguljastog panela koji ima konačnu visinu napravljen je kompromis na način da se koristio Poissonov koeficijent u izrazu za modul elastičnosti tanke grede.



Slika 4.10 Mjerenje impulsnog odziva

Modul elastičnosti panela odredio se iz frekvencije 1. oblika vibriranja duguljaste trake dimenzija ( $0,185 \times 0,0275 \times 0,0005$  m) koja je uklještena na jednom kraju. Izmjerena je frekvencije 1. oblika vlastitog vibriranja:  $f_1 = 8,25$  Hz.

Izraz za izračun vlastitih frekvencija vibriranja homogene grede čija je duljina mnogo veća od dimenzija poprečnog presjeka po metodi Rayleigh-Ritz-a (3.1):

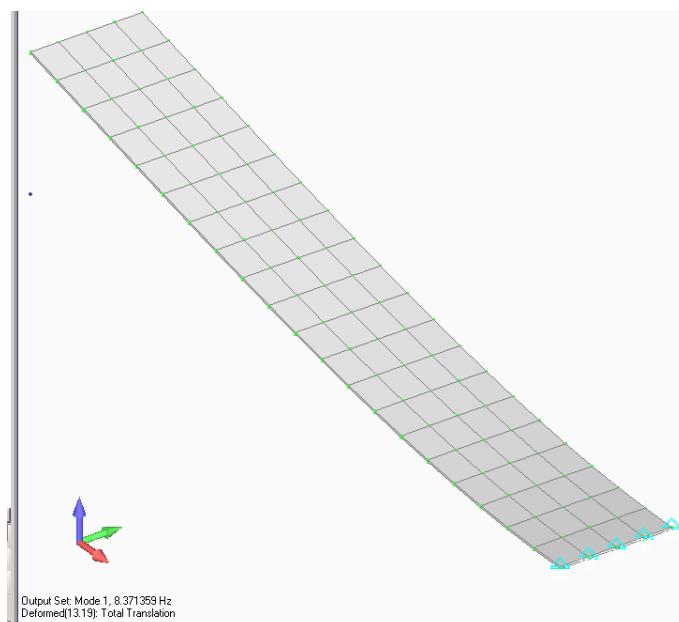
$$\omega_n = a_n \sqrt{\frac{EI}{m_g l^4}}$$

gdje je  $EI$  fleksijska krutost grede,  $l$  duljina grede,  $m_g$  masa po jedinici duljine i  $a_n$  numerička konstanta koja za 1. oblik vibriranja iznosi  $a_1 = 3,52$  po Rayleigh-Ritz metodi [75].

Iz navedenog izraza (4.1) slijedi izraz za određivanje modula elastičnosti materijala grede

$$E = \frac{m_g l^4}{I} \left( \frac{\omega_n}{a_n} \right)^2 = \frac{12 \rho \cdot l^4}{h^2} \left( \frac{2\pi f_n}{a_n} \right)^2 \quad (4.1)$$

te je dobiven modul elastičnosti  $E = 1,11 \cdot 10^{11}$  Pa.

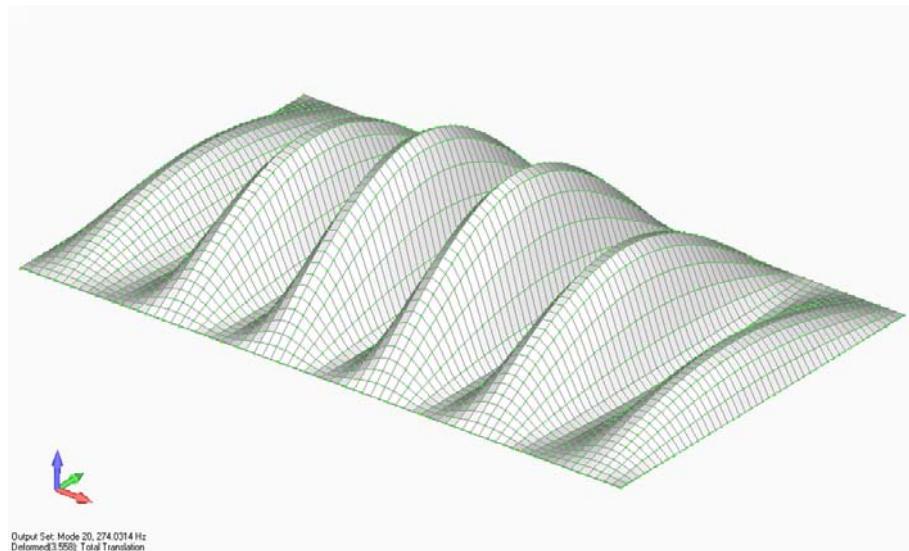


Slika 4.11 Provjera frekvencije 1. oblika vibriranja

Koristeći računalni program Femap potvrđena je dobivena vrijednosti modula elastičnosti.

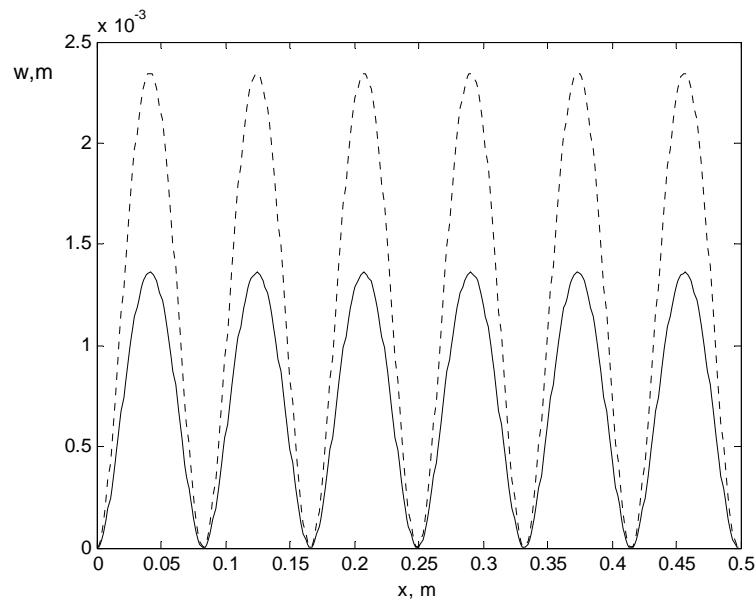
S obzirom da je model grede koji se koristio u izračunu beskonačan dok je eksperimentalni model konačan, potrebno je odrediti ekvivalentni modul elastičnosti za beskonačan model iz kojeg će slijediti slično ponašanje numeričkog modela.

Referentni oblik vibriranja periodički oslonjenih panela pojavljuje se na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog frekvencijskog propagacijskog pojasa i po obliku je jednak prvom vlastitom obliku grede konačne duljine jednog perioda beskonačne grede koja je uklještena na oba ruba. Cilj je definirati navedenu frekvenciju sa računalnim programom Femap za spriječene pomaka u osloncima po  $z$ -osi ( $f_{gg1pp}=274,03$  Hz).



Slika 4.12 Prikaz referentnog oblika vibriranja na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog pojasa

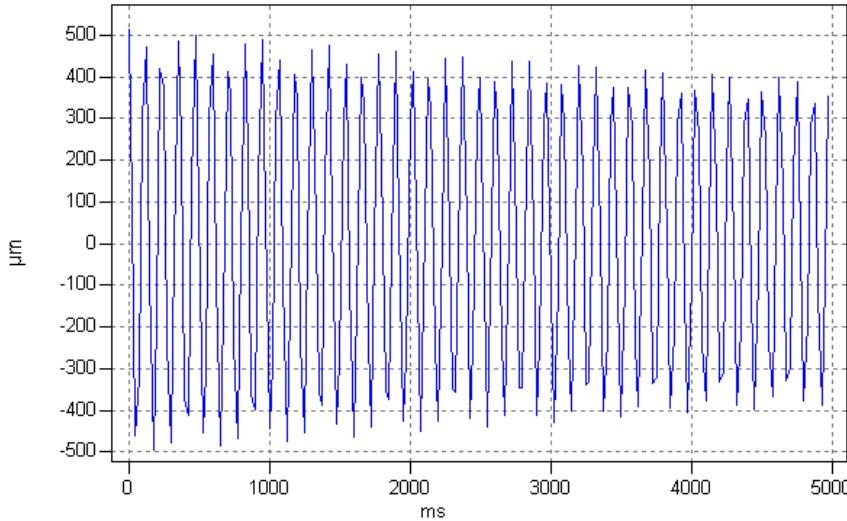
U nastavku se natražno iz beskonačnog modela grede odredio ekvivalentni modul elastičnosti s kojim je gornja frekvencija prvog propagacijskog pojasa jednaka istoj dobivenoj sa računalnim programom Femap.



Slika 4.13 Oblik vibriranja na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog pojasa izračunat pomoću računalnog modela u Matlab-u

U matlab modelu iz  $E=1,11 \cdot 10^{11}$  Pa dobila se  $f_{gg1pp}=263,65$  Hz, dok je za  $E_{ekv}=1,2 \cdot 10^{11}$  Pa dobivena  $f_{gg1pp}=274,14$  Hz što se odabrala kao dovoljno točna vrijednost.

Prigušenje u materijalu panela određeno je eksperimentalno iz mjerjenja na slici 4.14. .



Slika 4.14. Vremenski odziv trake od mesinga

Iz izmjerенog odziva na slici 4.14. nakon impulsa očitane su vrijednosti amplituda i trenutaka odziva: 1. maksimum (475 ms, 497 μm), 36. maksimum (4625 ms, 398 μm) uz provjeru da nije došlo do pomaka nultog položaja apscise. U nastavku je izračunata veličina logaritamskog dekrementa

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x_0}{x_n} \right) = \frac{1}{35} \ln \left( \frac{0,497}{0,398} \right) = 0,0063 \quad (4.2)$$

pa se iz jednakosti

$$\delta = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.3)$$

definirao izraz za omjer prigušenja  $\zeta$  i odredila njegova veličina

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0,0063}{\sqrt{4\pi^2 + 0,0063^2}} = 0,001$$

Ukoliko se pretpostavi da u materijalu nastaje sila prigušenja zbog unutarnjeg trenja (histerezno prigušenje) koeficijent prigušenja materijala  $\eta$  izračunava se iz izraza

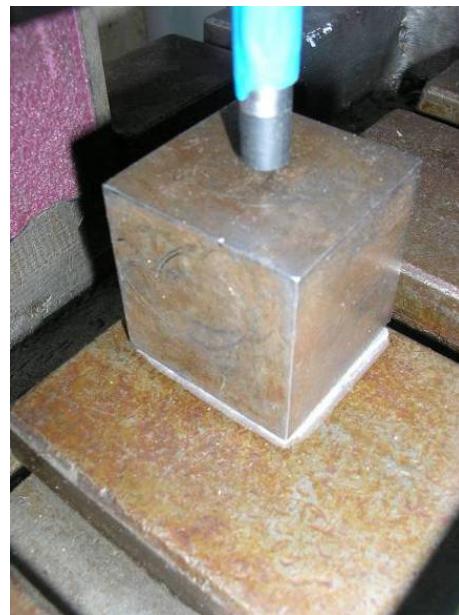
$$\eta = 2\zeta = 0,002 \quad (4.4)$$

i kompleksni modul elastičnosti panela se može napisati u obliku

$$E_{ekv}^* = E_{ekv} (1 + j\eta) \quad (4.5)$$

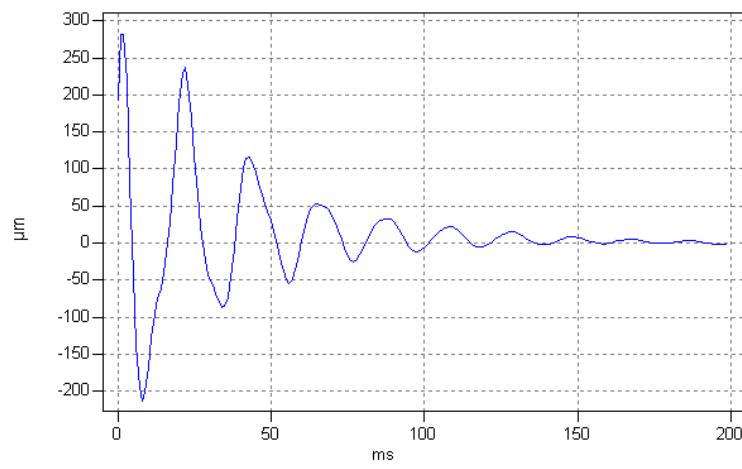
#### 4.3.2. Brtva

Prigušenje u brtvama odredilo se iz vibracijskog odziva nedeformabilne kocke od čelika (slika 4.15 ) koje je impulsno pobuđeno na aksijalno vibriranje.



Slika 4.15 *Prikaz mjerjenja prigušenja u brtvi*

Zbog postojanja prigušenja amplituda vibracija se smanjuje. Slijedi izračun prigušenja.



Slika 4.16 *Mjerenje prigušenja u brtvi*

Izmjerene su nakon impulsa ove vrijednosti: 1. maksimalna vrijednost (22 ms, 236,8 μm) i 5. maksimalna vrijednost (108 ms, 22,91 μm) uz postojanje pomaka nulte koordinate z-osi na položaj 2,08 μm. Slijedi izračun logaritamskog dekrementa

$$\delta_D = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x_0}{x_n} \right) = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{0,2368 - 0,00208}{0,02291 - 0,00208} \right) = 0,606$$

pa iz jednakosti

$$\delta_D = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

slijedi izraz za omjer prigušenja  $\zeta$

$$\zeta = \frac{\delta_D}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0,606}{\sqrt{4\pi^2 + 0,606^2}} = 0,096$$

Ukoliko se prepostavi da u materijalu nastaje sila prigušenja zbog unutarnjeg trenja (histerezno prigušenje) koeficijent prigušenja materijala  $\eta$  izračunava se iz izraza

$$\eta = 2\zeta = 0,192$$

i kompleksni modul elastičnosti panela se može napisati u obliku

$$E_{ekv}^* = E_{ekv} (1 + j\eta)$$

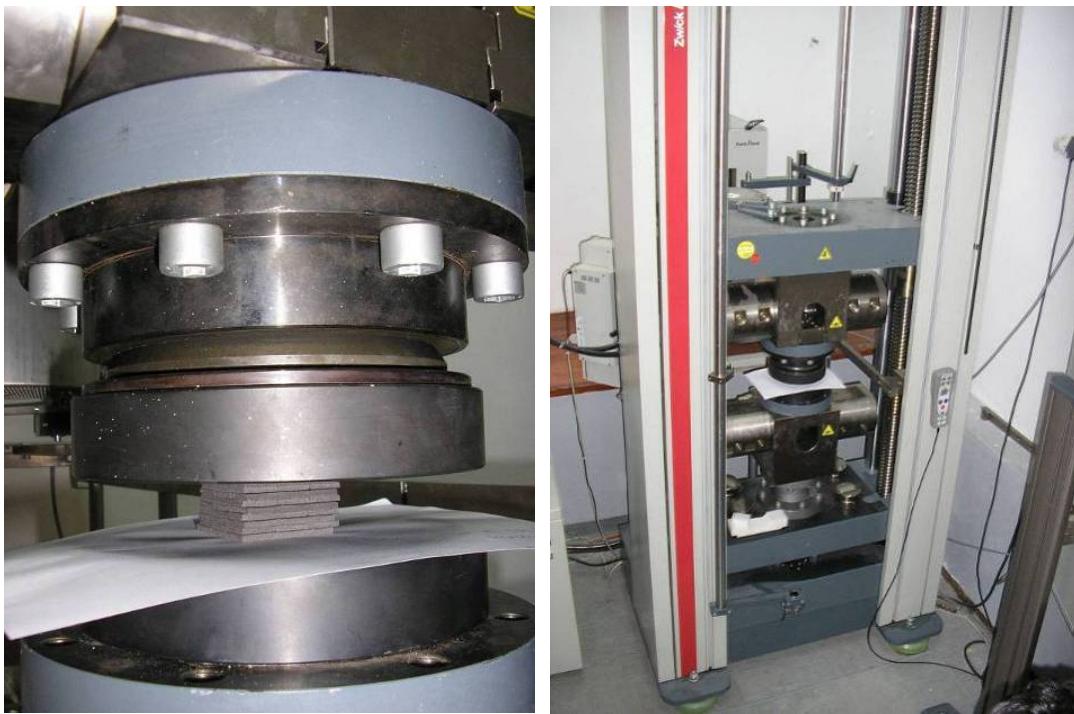
Poissonov koeficijent za brtvu odabran je iz literature v=0,49.

Gustoća brtve određena je iz volumena panela i mase eksperimentalnog uzorka po izrazu

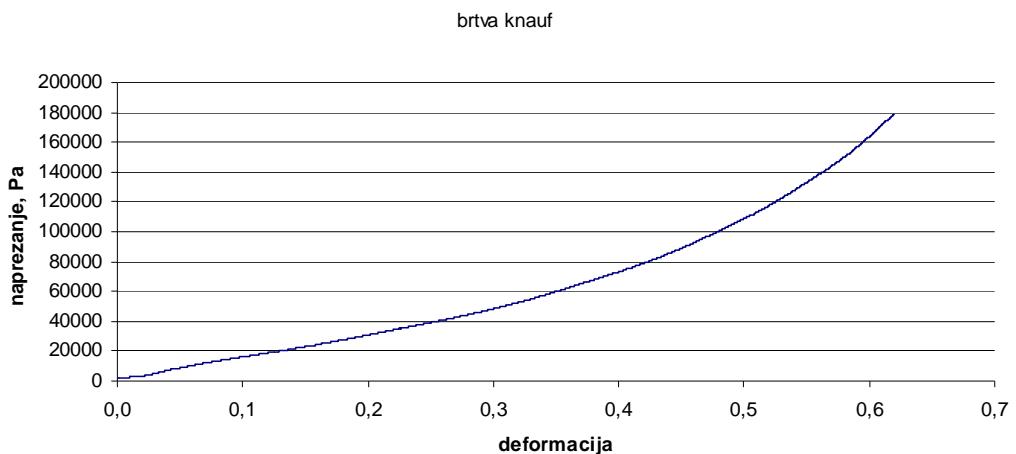
$$\rho = \frac{m}{V}$$

i iznosi 46 kg/m<sup>3</sup>.

Modul elastičnosti brtve određen je eksperimentalno. Potrebno je primjetiti da je brtva nelinearna pa je potrebno s obzirom na stlačenost brtve koristiti odgovarajući modul za daljnji izračun. Za određivanje modula elastičnosti brtve izrađeni su testni uzorci cca 0,05×0,05×0,032 m koji su opterećeni na tlak na kidalici (slika 4.17 ) te je dobiven dijagram  $\sigma(\varepsilon)$  (slika 4.18).



Slika 4.17 Kidalica, Laboratorij za čvrstoću Tehničkog fakulteta Rijeka



Slika 4.18 Dijagram  $\sigma(\epsilon)$  za brtvu, mjereno na kidalici na slici 4.17

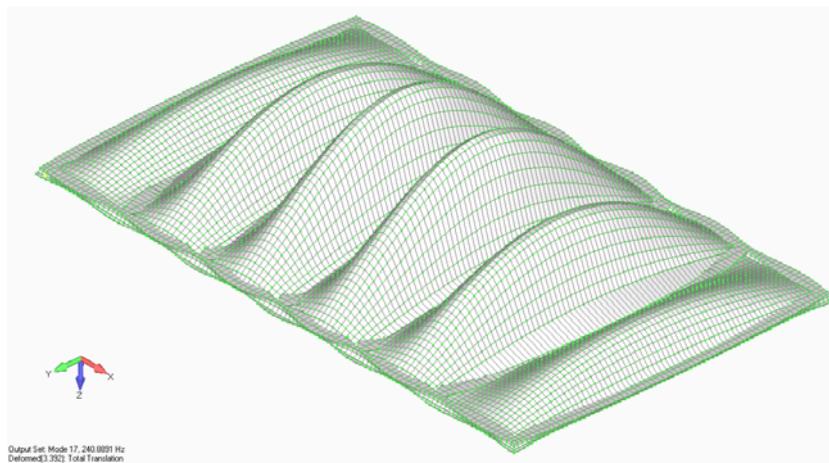
Očito je da se modul elastičnosti brtvi mijenja pri rastu opterećenja pa je iz dijagrama na slici 4.18 definiran modul elastičnosti koji ima brtva u ravnotežnom položaju u osloncu.



Slika 4.19 *Dva periodična okvira na konstantnoj udaljenosti s ciljem definiranja krutosti poprečne opruge u osloncima*

Modul elastičnosti brtve odredio se iz udaljenosti poprečnih okvira koja je određena sa duljinom graničnika, 6 mm. S obzirom da je visina brtvi 3,2 mm i da je panel debljine 0,5 mm slijedi da je nakon montaže brtva stisnuta na dimenziju 2,75 mm tj. za pomak 0,45 mm. Iz nagiba tangente na krivulju na slici 4.18 izračunava se modul elastičnosti  $E = 170684$  Pa.

S obzirom da u stvarnosti brtva ima konačne dimenzije a u matlab model se uvrštava samo vrijednost krutosti poprečne opruge ona je određena iz gornje granične frekvencije prvog propagacijskog frekvencijskog pojasa  $f_{gg1pp} = 240,89$  Hz dobivene iz Femapa nakon dodavanja brtvi u MKE model. Nakon toga se natražno iz  $f_{gg1pp}$  u matlabu odredila vrijednost  $K_t$ .



Slika 4.20 *Panel između dvije brtve*

U nastavku se natražno iz beskonačnog modela grede odredila ekvivalentna krutost poprečne opruge  $K_{tekv}$  s kojom je gornja frekvencija prvog propagacijskog pojasa jednaka istoj dobivenoj sa računalnim programom Femap ( $K_{tekv} = 2 \cdot 10^6$  N/m).

### 4.3.3. Određivanje faktora korekcije

Akustički odziv ploče procijenio se na temelju zvučnog transmisijskog gubitka. Po proceduri mjerjenja je prvo izmjerena zvučni transmisijski gubitak za uklješteni panel na vanjskim rubovima pod djelovanjem 3D difuznog polja iz čega se u nastavku odredio konstantni faktor korekcije  $k_{CF}$  te se pristupilo mjerenu zvučnog transmisijskog gubitka za periodičko oslonjen panel na brtve pod djelovanjem 2D difuznog polja.

Procedura mjerjenja zvučnog transmisijskog gubitka panela  $TL$  započela je mjerjenjem razine bijele buke (zvučnog tlaka) u ječnoj komori,  $L_{p,ječna}$ , i razine zvučnog tlaka novonastale buke u gluhoj komori,  $L_{p,gluha}$ , iz kojih se izračunao koeficijent redukcije buke između ječne i gluhe komore  $\Delta L_p$  po tercnim frekvencijskim pojasima

$$\Delta L_p = L_{p,ječna} - L_{p,gluha} \quad (4.6)$$

Koeficijent zvučnih transmisijskih gubitaka kroz panel  $TL$  definirao se iz izraza

$$TL = \Delta L_p + 10 \log_{10} \left( \frac{A}{S_a \alpha_a} \right). \quad (4.7)$$

U izrazu (4.7) je s  $S_a \alpha_a$  označena tzv. Sabine-ova apsorpcija gluhe komore gdje je  $S_a$  površina a  $\alpha_a$  koeficijent apsorpcije apsorpcijskog materijala i  $A$  je površina testnog okvira.

Veličina  $10 \log_{10} \left( \frac{A}{S_a \alpha_a} \right)$  je konstantna za svaki testni panel koji će se testirati u ovom eksperimentu pa slijedi da se ista može zamijeniti s konstantnim faktorom korekcije  $k_{CF}$ , pa se dobiva novi izraz za određivanje zvučnih transmisijskih gubitaka kroz panel:

$$TL = \Delta L_p - k_{CF} \quad (4.8)$$

Za određivanje faktora korekcije  $k_{CF}$  pomoću mjerjenja za postojeće eksperimentalne uvjete napravljen je okvir (slika 4.7) i uklješten je po svim rubovima. Teorijski zvučni transmisijski gubitak za panel  $TL_{teor}$  od 100-10000 Hz definiran je jednadžbom masenog zakona

$$TL_{teor} (dB) = 20 \log_{10} (m_p) + 20 \log_{10} (f) - 47,2 \quad (4.9)$$

gdje je  $m_p$  specifična gustoće panela a  $f$  je centralna frekvencija za zadano tercno frekvencijski pojas. Maseni zakon za teorijski zvučni transmisijski gubitak vrijedi za velike panele (površine oko  $20 \text{ m}^2$ ) oslonjene po svojim vanjskim rubovima dok se u ovom eksperimentu

radi o panelu površine  $0,15 \text{ m}^2$  koji je periodički oslonjen pa se za  $TL_{teor}$  uzela vrijednost izračunata s računalnim programom Actran. U ječnoj komori generira se bijela buka pomoću omnidirekcijskog zvučnika s frekvencijskim pojasom od 100 do 10000 Hz te se iz simultano izmjerena razina buke u ječnoj,  $L_{p,ječna}$ , i gluhoj komori,  $L_{p,gluha}$ , određuje koeficijent redukcije buke između ječne i gluhe komore  $\Delta L_p$  po izrazu (4.6) :

$$k_{CF,lab} = \Delta L_p - TL_{teor} \quad (4.10)$$

Izmjerene vrijednosti korekcijskih faktora koriste se kasnije za izračun  $TL$ -a testnih panela iz izmjerene koeficijenta redukcije buke između ječne i gluhe komore  $\Delta L_p$  po izrazu:

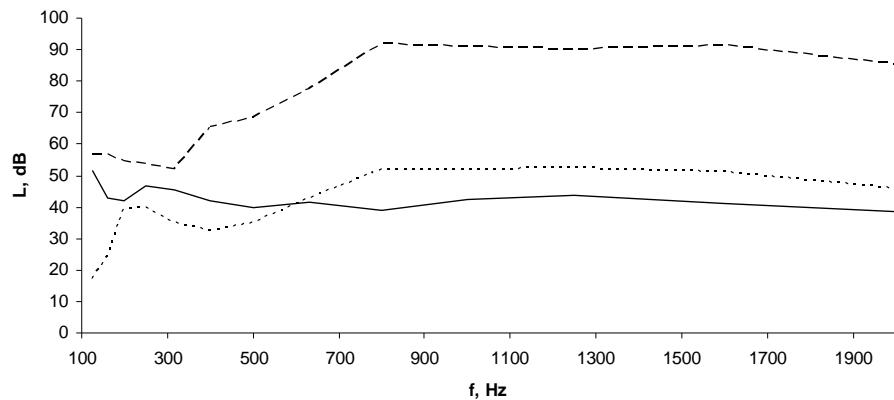
$$TL = \Delta L_p - k_{CF,lab} \quad (4.11)$$

$f(\text{Hz})$	$L_{p,ječna} (\text{dB})$	$L_{p,gluha} (\text{dB})$	$\Delta L (\text{dB})$	$TL_{teor} (\text{dB})$	$k_{CF,lab} (\text{dB})$
125	53,25	18,61	34,64	47,21	12,57
160	53,93	18,86	35,07	45,57	10,50
200	50,78	32,9	17,88	44,84	26,96
250	49,85	38,79	11,06	44,23	33,17
315	49,84	34,14	15,70	44,25	28,55
400	62,76	30,56	32,20	41,03	8,83
500	66,72	31	35,72	41,80	6,08
630	75,53	40,32	35,21	42,06	6,85
800	89,2	47,4	41,80	41,07	-0,73
1000	88,01	50,07	37,94	41,48	3,54
1250	87,4	50,28	37,12	42,71	5,59
1600	88,82	48,88	39,94	40,67	0,73
2000	82,21	43,53	38,68	38,06	-0,62

Tablica 4.1 Vrijednosti korekcijskog faktora

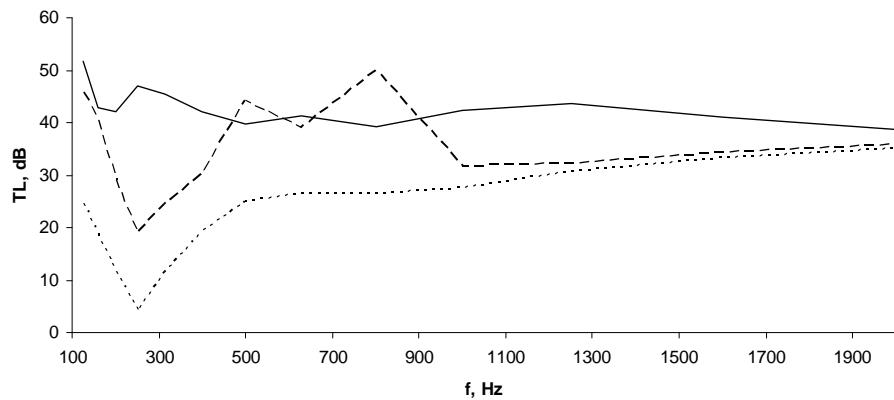
#### 4.3.4. Analiza rezultata zvučnog transmisijskog gubitka

Mjerenja razine bijele buke u ječnoj komori i razine transmitirane buke u gluhoj komori prikazana su na slici 4.21 kao i izračunati zvučni transmisijski gubitak  $TL$



Slika 4.21 Izmjerene velicine razine buke u ječnoj komori (-----), gluhoj komori (.....) i izračunati zvučni transmisijski gubitak (\_\_\_\_\_)

U nastavku se eksperimentalno određeni zvučni transmisijski gubitak usporedio s zvučnim transmisijskim gubitkom određenim s metodom virtualnog rada i metodom prostornog isječka.



Slika 4.22 Rezultati zvučnih transmisijskih gubitaka: a) metoda virtualnog rada  $\theta_{lim} = 72^\circ$  ..... , b) metoda virtualnog rada i metoda prostornog isječka -----, i c) eksperimentalni rezultati \_\_\_\_\_.

Na dijagramu na slici 4.22 vidljivo je dobro podudaranje rezultata iznad 500 Hz za metodu prostornog isječka što je teorijski potkrepljeno i s numeričkim rezultatima u odlomku 3.3.7. Podudaranje rezultata raste s rastom frekvencije.



## **Poglavlje 5.**

### **Zaključak**

S ciljem zadovoljavanja zahtjeva za zaštitu od buke te nosivosti i optimalne cijene konstrukcije u praksi se često koriste paneli koji su periodički oslonjeni na oslonce (npr. plivajući podovi, pregrade u avionima i brodovima, itd.). Takve stijenke imaju optimalne akustičke karakteristike i relativno malu masu te se zbog dodatnih oslonaca mogu opteretiti silom. Periodičko oslanjanje na oslonce uzrokuje pojavljivanje velikog broja novih vlastitih frekvencija što uzrokuje potrebu korištenja materijala s povećanim prigušenjem. Utjecaj prigušenja u panelu na njegov akustički odziv je opširno obrađen u postojećoj literaturi dok je u ovoj disertaciji dan naglasak na određivanje utjecaja prigušenja u osloncima na akustički odziv panela uz korištenje metode virtualnog rada dok je pomak panela definiran s redom prostornih harmonijskih valova.

Jednosmjerno periodički oslonjen panel konačnih dimenzija kome je visina jednog perioda panela minimalno 3 puta veća od njegove širine tj. udaljenosti između oslonaca uz djelovanje ravninskog akustičkog polja, u kojem su vektori akustičkih tlakova uvijek u poprečnoj ravnini na panel, može se modelirati kao periodički oslonjena greda po relevantnoj literaturi. Paneli takvih dimenzija su česti u praksi pa se stoga navedeni model odabrao za

analizu akustičkog odziva panela. Odabrana je beskonačna duljina grede za koju izračun ne uključuje postojeće refleksije od vanjskih rubova što pojednostavljuje izraze za gibanje panela dok se akustička radijacija približi vrijednostima konačnih panela po metodi prostornog isječka.

U ovoj disertaciji izrađeno je vlastito programsko rješenje AKUPAN u programskom paketu MATLAB. Programsko rješenje se može podijeliti na izračunavanje slobodnog i prisilnog gibanja periodički oslonjene grede. Vrijednost navedenog pristupa je u mogućnosti usporedbe dobivenih rezultata u sklopu čega je predložen dijagramski prikaz vibracijskog odziva grede opisanog s redom prostornih harmonijskih valova u kojem su bojom definirani intenziteti amplitude pojedinih valova dok je iznos njihovih faznih brzina na ordinati a frekvencije izračuna na apscisi. S navedenim pristupom moguće je pratiti promjene u vibracijskom odzivu panela pri promjeni upadnog kuta ravninskog akustičkog vala iz čega slijede jasni zaključci o prirodi akustičkog odziva panela. Po saznanju autora opisani pristup do sada nije publiciran.

Fazne brzine pojedinih prostornih harmonijskih valova izračunate su iz faznog kuta vibracija točaka na jednom periodu panela. Ukoliko se fazni kut u točkama grede linearno smanjuje u pozitivnom smjeru (koordinatnog sustava) promatrani val se giba u pozitivnom smjeru i obratno, ukoliko fazni kut linearno raste u pozitivnom smjeru promatrani val se giba u negativnom smjeru. Veličina fazne brzine slijedi iz iznosa nagiba krivulje fazne brzine u funkciji o položaju na jednom periodu panela (npr. kod stojnih valova se dobije horizontalni pravac gdje je fazni kut jednak 0 ili  $\pi$ ). Postojeći izrazi za definiranje fazne brzine iz relevantne literature ne uključuju sve kombinacije utjecajnih varijabli na krajnji smjer vala dok se iz opisanog izračuna smjer i veličina fazne brzine mogu odrediti za sve slučajeve.

Pri nultom upadnom kutu ravninskog akustičkog vala tj. kad je njegova fronta paralelna s panelom rezonantni odziv panela događa se na gornjim graničnim frekvencijama propagacijskih pojaseva gdje vibriranje ima istostrani uklješteni oblik vibriranja. Navedeni oblik vibriranja rezonira s prisilom i zato dolazi do povećanja amplituda. Na donjim graničnim frekvencijama propagacijskih pojaseva amplitude su minimalne jer vibriranje ima sinusni oblik pa prisila istovremeno gura jedan briješ a suprostavlja se susjednom. Pri rastu upadnog kuta dolazi do pomaka rezonantnih frekvencija vibriranja. Gornja granična frekvencija prvog propagacijskog pojasa snizuje se kao i amplitude odgovarajućih prostornih harmonijskih valova dok donja granična frekvencija drugog propagacijskog pojasa raste kao i amplitude odgovarajućih prostornih harmonijskih valova. Navedeno se ponavlja u svim propagacijskim pojasima. Opisani događaji lako se mogu pratiti u predloženom dijagramu.

Izvedena je funkcija oblika slobodnog vibriranja beskonačne periodički oslonjene grede na jednostavne oslonce, čiji je oblik usporeden s postojećim u literaturi te je potvrđena njezina točnost. Iz dinamičke ravnoteže grede izračunate su propagacijske konstante koje se koriste za definiranje prostornih harmonijskih valova iz čije sume slijedi ukupno gibanje panela. U ovoj disertaciji opisan je njihov izračun korištenjem metode virtualnog rada na slobodne vibracije što po saznanju autora također do sada nije publicirano.

U disertaciji je analiziran utjecaj brojnosti prostornih harmonijskih valova na točnost rezultata, kako zvučnog transmisijskog gubitka tako i propagacijske konstante, te su definirani dijagrami u kojima se vidi utjecaj prigušenja na sustav. U sustavu s dovoljnim prigušenjem maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojavljuje se na najvišoj frekvenciji izračuna kao što je i navedeno u relevantnoj literaturi. Međutim, ukoliko sustav nema dovoljno prigušenja maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojaviti će se na nižoj frekvenciji što nije navedeno u relevantnoj literaturi.

U disertaciji je analizirana brzina izračuna amplituda pojedinih prostornih harmonijskih valova pomoću razvoja u Fourierov red i metode virtualnog rada. Definiran je granični broj prostornih harmonijskih valova do kojeg se amplitude prostornih harmonijskih valova brže izračunavaju pomoću metode virtualnog rada nego s razvojem u Fourierov rad. Navedeni broj prostornih harmonijskih valova se snizuje pri rastu prigušenja u sustavu.

U disertaciji je izvršena usporedba dobivenih rješenja vlastitog numeričkog modela s rješenjima programa Actran (eng. *ACoustic TRANsmision*) koji se bazira na metodi konačnih elemenata. Korišteni su isti rubni uvjeti koji su procijenjeni eksperimentalno. Dobivena rješenja programa Actran smatraju se točnim i time su referentna za usporedbu. Dobivena je dobra podudarnost rezultata.

U sklopu disertacije izrađen je eksperimentalni model za mjerjenje vibracija panela nastalih zbog djelovanja ravninskog i difuznog zvučnog polja kao i za mjerjenje zvučnog transmisijskog gubitka što je omogućeno s izradom ječne i gluhe komore te odgovarajućeg zida s otvorom za panel. Dimenzije ječne i gluhe komore optimizirane su obzirom na dostupni volumen prostorije. Ječna komora izrađena je po referentnoj literaturi za male ječne komore s neparalelnim stijenkama. Stijenke komore izrađene su od reflektivnih materijala: betona, pločica, knaufa i mdf-a (eng. *medium density fiber*). Dimenzije gluhe komore optimizirane su s ciljem dobivanja što ravnomjernijeg akustičkog odziva zraka unutar komore. Sve su stijenke obložene s visoko apsorpcijskim materijalima proizvođača KnaufInsulation. Na temelju

inicijalnih mjerena određena je korelacija između eksperimenta i modela te su uspoređeni dobiveni rezultati. Dobivena je dobra podudarnost rezultata.

Predlaže se nastavak istraživanja u ovim smjerovima:

- razvijanje numeričkog modela s direktnim rješavanjem jednodžbi gibanja slobodnih i prisilnih vibracija periodički oslonjene grede na elastične oslonce i usporedba efikasnosti programskog rješavača s metodom virtualnog rada,
- razvijanje numeričkog modela ortogonalno ukrepljenog panela,
- proširenje eksperimentalnog modela na veći broj perioda i
- primjena numeričkog izračuna na praktične probleme te definiranje novih utjecajnih parametara.

## Popis literature

- [1] Y.K. Lin, *Free vibrations of continuous skin stringer panels*, Journal of Applied Mechanics 27, pp. 669, 1960.
- [2] Y.K. Lin, *Stresses in continuous skin-stiffened panels under random loading*, Journal of Aerospace Science 29, pp. 67, 1962.
- [3] Y.K. Lin, I.D. Brown, P.C. Deltschle, *Free vibrations of a finite row of continuous skin stringer panels*, Journal of Sound and Vibration 1, pp. 14, 1964.
- [4] C.A. Mercer, *Response of a multi-supported beam to a random pressure field*, Journal of Sound and Vibration 2, pp. 293, 1965.
- [5] A.W. Leissa, *Vibration of plates*, NASA SP-160, 1969.
- [6] W. Soedel, *Vibrations of Shells and Plates*. New York: Marcel Dekker, Inc. 2004.
- [7] M. Heckl, *Wave propagation on beam-plate systems*, Journal of the Acoustical Society of America 33 (1961) pp. 640-651.
- [8] D.J. Mead, *A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic system with multiple coupling*, Journal of Sound and Vibration 27 (1973) pp. 235-260.
- [9] D.J. Mead, *Wave propagation and natural modes in periodic systems: II. Multi-coupled systems, with and without damping*, Journal of Sound and Vibration 40 (1975) pp. 19-39.
- [10] Y. Yong, Y.K. Lin, *Propagation of decaying waves in periodic and piecewise periodic structures of finite length*, Journal of Sound and Vibration 129 (1989) pp. 99-118.
- [11] A.K. Roy, R. Plunkett, *Wave attenuation in periodic structures*, Journal of Sound and Vibration 104 (1986) pp. 395-410.
- [12] U. Orrenius, S. Finnveden, *Calculation of wave propagation in rib stiffened plate structures*, Journal of Sound and Vibration 198 (1996) pp. 203-224.
- [13] P.G. Bremner, *Vibro-acoustics of ribbed structures - a compact modal formulation for SEA models*, Proceedings of the Noise-Con 94, Ft. Lauderdale, Florida, May 1994.
- [14] V. Cotonu, R.S. Langley, P.J. Shorter, *A statistical energy analysis subsystem formulation using finite element and periodic structure theory*, Journal of sound and Vibration 318 (2008) pp. 1077-1108.
- [15] A. Mejdi, N. Atalla, *Dynamic and acoustic response of bidirectionally stiffened plates with eccentric stiffeners subject to airborne and structure-borne excitations*, Journal of Sound and Vibration 329 (2010) pp. 4422-4439.
- [16] J. Wei, M. Petyt, *A method of analyzing finite periodic structures. Part 1: theory and examples*, Journal of Sound and Vibration 202, pp. 559-569, 1997.

- [17] J.Wei, M. Petyt, *A method of analyzing finite periodic structures. Part 2: comparison with infinite periodic structure theory*, Journal of Sound and Vibration 202, pp. 571-583, 1997.
- [18] B.A.J. Mustafa, R. Ali, *Prediction of natural frequency of vibration of stiffened cylindrical shells and orthogonally stiffened curved panels*, Journal of Sound and Vibration 113 (1987) pp. 317.
- [19] M. Barrette, A. Berry, O. Beslin, *Vibration of stiffened plates using hierarchical trigonometric functions*, Journal of Sound and Vibration 235 (8) (2000) pp. 727-747.
- [20] D.W. Fox, V.G. Sigillito, *Bounds for frequencies of rib reinforced plates*, Journal Sound and Structural Vibration 69 (4) (1982) pp. 497-507.
- [21] D.W. Fox, V.G. Sigillito, *Bounds for eigen frequencies of a plate with an elastically attached reinforcing rib*, International Journal of Solids and Structures 18 (3) (1982) pp. 235-247.
- [22] E.J. Sapountzakis, J.T. Katsikadelis, *Dynamic analysis of elastic plates reinforced with beams of doubly-symmetrical cross section*. Computational Mechanics 23 (1999) pp. 429-430.
- [24] M. Heckl, *Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structure*, Journal of Acoustical Society of America 36, pp. 1335, 1964.
- [25] D.J. Mead, E.M. Wilby, *Forced vibration of periodically-supported beams subjected to convected, homogeneous pressure fields*, University of Southampton Report., 1971.
- [26] D.J. Mead, K.K. Pujara, *Space-harmonic analysis of periodically supported beams: response to convected random loading*, Journal of Sound and Vibration 14, pp. 525-541, 1971.
- [27] R. D. Ford, *The response of structures to jet noise*, Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1962.
- [28] C.A. Mercer, C. Seavey, *Prediction of natural frequencies and normal modes of skin stringer panel rows*, Journal of Sound and Vibration 6, 149, 1967.
- [29] G. Maidanik, *Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields*, Journal of the Acoustical Society of America 34 (6) (1962) pp. 809-826.
- [30] F. Fahy, *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*, Academic Press, London, 2007.
- [31] G.P. Mathur, B.N. Tran, J.S. Bolton, N.-M. Shiao, *Sound transmission through stiffened double-panel structures lined with elastic porous materials*, Proceedings of 14th DGLR/AIAA Aeroacoustical Conference, pp. 102-105, 1992.
- [32] J.-H. Lee, J. Kim, *Analysis of sound transmission through periodically stiffened panels by space-harmonic expansion method*, Journal of Sound and Vibration 251(2), pp. 349-366, 2002.
- [33] D.J. Mead, *Free wave propagation in periodically supported, infinite beams*, Journal of Sound and Vibration 11, pp. 181-197, 1970.

- [34] D.J. Mead, *Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton*, Journal of Sound and Vibration 190 (1996) pp. 495-524.
- [35] E.H. Dowell, C.-H. Chao, D.B. Bliss, *Acoustoelasticity: general theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation, including comparison with experiments*, Journal of Sound and Vibration 52, pp. 519-542, 1977.
- [36] W. Desmet, P. Sas, *Sound transmission of finite double-panel partitions with sound absorbing material and panel stiffeners*, Proceedings of First Joint CEAS/AIAA Aeroacoustical Conference (16th AIAA Aeroacoustics Conference), AIAA-95-043, pp. 311-320, 1995.
- [37] O.K. Bedair, *Fundamental frequency determination of stiffened plates using sequential quadratic programming*, Journal of Sound and Vibration 199, pp. 87-106, 1997.
- [38] S. Mukherjee, S. Parthan, *Wave propagation in one-dimensional multi-bay periodically supported panels under supersonic fluid flow*, Journal of Sound and Vibration 186, pp. 71-86, 1995.
- [39] C. Maurys, P.O. Matte, *Sound transmission through a rib-stiffened plate comparison of light-fluid approximation with experimental results*, Journal of Sound and Vibration 249 (1) (2002) pp. 206-212.
- [40] T.R. Lin, J. Pan, *A closed form solution for the dynamic response of finite ribbed plates*, Journal of the Acoustical Society of America 119 (2) (2006) pp. 917-925.
- [41] T.R. Lin, *A study of modal characteristics and the control mechanism of finite periodic and irregular ribbed plates*, Journal of the Acoustical Society of America 123 (2) (2008) pp. 729-737.
- [42] B. Liu, L. Feng, A. Nilsson, *Sound transmission through curved aircraft panels with stringer and ring frame attachments*, Journal of Sound and Vibration 300 (2007) pp. 949-973.
- [43] A.J. Cooper, D.G. Crighton, *Response of irregularly ribbed elastic structures under fluid loading to localized excitation*, Proceedings of the Royal Society of London 455 (1999) pp. 1083-1105.
- [44] J. Legault, A. Mejdi, N. Atalla, *Vibro-acoustic response of orthogonally stiffened panels: The effects of finite dimensions*, Journal of Sound and Vibration 330 (2011) pp. 5928-5948.
- [45] B.R. Mace, *Periodically stiffened fluid-loaded plates, I: response to convected harmonic pressure and free wave propagation*, Journal of Sound and Vibration 73 (4) (1980) pp. 473-486.
- [46] B.R. Mace, *Periodically stiffened fluid-loaded plates, II: response to line and point forces*, Journal of Sound and Vibration 73 (1980) pp. 487-504.
- [47] B.R. Mace, *Sound radiation from fluid-loaded orthogonally stiffened plates*, Journal of Sound and Vibration 79 (1981) pp. 439-452.
- [48] D.J. Mead, *Plates with regular stiffening in acoustic media: vibration and radiation*, Journal of the Acoustical Society of America 88 (1990) pp. 391-401.

- [49] J. Wang, T.J. Lu, J. Woodhouse, R.S. Langley, J. Evans, *Sound transmission through lightweight double-leaf partitions: theoretical modeling*, Journal of Sound and Vibration 286 (2005) pp. 817-847.
- [50] F.X. Xin, T.J. Lu, *Analytical modeling of fluid-loaded orthogonally ribbed-stiffened sandwich structures: Sound transmission*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 58 (2010) pp. 1374-1396.
- [51] F.X. Xin, T.J. Lu, *Sound radiation of orthogonally rib-stiffened sandwich structures with cavity absorption*, Composites Science and Technology 70 (2010) pp. 2198-2206.
- [52] F.X. Xin, T.J. Lu, *Transmission loss of orthogonally rib-stiffened double-panel structures with cavity absorption*, Journal of the Acoustical Society of America 129 (2011) pp. 1919-1934.
- [53] F.X. Xin, T.J. Lu, *Analytical modeling of wave propagation in orthogonally rib-stiffened sandwich structures: sound radiation*, Computers and Structures 89 (2011) pp. 507-516.
- [54] J. Legault, N. Atalla, *Numerical and experimental investigation of the effect of structural links on the sound transmission of a lightweight double panel structure*, Journal of Sound and Vibration 324 (2009) pp. 712-732.
- [55] C.H. Hodges, J. Woodhouse, *Theory of noise and vibration in complex structures*, Reports on Progress in Physics 49 (1986) pp. 107-170.
- [56] L. Dozio, M. Ricciardi, *Free vibration analysis of ribbed plates by a combined analytical-numerical method*, Journal of Sound and Vibration 319 (2009) pp. 681-697.
- [57] B. Liu, *Noise radiation of aircraft panels subject to turbulent boundary layer excitations*, Journal of Sound and Vibration 314 (2008) pp. 693-711.
- [58] M. Villot, C. Guigou, L. Gagliardini, *Predicting the acoustical radiation of finite size multi-layered structures by applying spatial windowing of infinite structures*, Journal of Sound and Vibration 245 (2001) pp. 433-455.
- [59] M. Villot, C. Guigou-Carter, *Using spatial windowing to take the finite size of plane structures into account in sound transmission*, NOVEM 2005 Conference, Biarritz, France, 2005.
- [60] S. Ghinet, N. Atalla, *Sound transmission loss of insulating complex structures*, Canadian Acoustics 29 (2001) pp. 26-27.
- [61] D. Rhazi, N. Atalla, *A simple method to account for size effects in the transfer matrix method*, Journal of the Acoustic Society of America, Express Letters 127 (2010) pp. 30-36.
- [62] Jer-Nan Juang, Minh Q. Phan, *Identification and control of mechanical systems*, Cambridge University Press, 2004.
- [63] R.E.D. Bishop, D.C. Johnson, *The mechanics of Vibrations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.
- [64] L. Cremer, M. Heckl, *Körperschall*, Berlin: Springer-Verlag, 1967.

- [65] L. Cremer, H.O. Leilich, *Zur Theorie der Biegekettenleiter*, Arch. d. elektr. Ubertr. 7 (6), pp. 261, 1953.
- [66] B. Tabarrok, *On duality in the oscillations of framed structures*, Journal of sound and Vibrations (1968) 8 (3), pp. 469-481.
- [67] P. Macioce, *Viscoelastic Damping*, Roush Industries, Inc.
- [68] L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens, J.V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1982.
- [69] B.R. Mace, *Periodically stiffened fluid-loaded plates, II: response to line and point forces*, Journal of Sound and Vibration 73 pp. 487-504, 1980.
- [70] D.J. Mead, *A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates*, Journal of Sound and Vibration 104 pp. 9-27, 1986.
- [71] S. Li, *Active modal control simulation of vibro-acoustic response of a fluid-loaded plate*, Journal of Sound and Vibration 330 (2011) pp. 5545-5557.
- [72] D. Pierce, *Acoustics*, New York: McGraw-Hill, 1981.
- [73] K.A. Mulholland, H.D. Parbrook, A. Cummings, *The transmission loss of double panels*, Journal of Sound and Vibration 6, pp. 324-334, 1967.
- [74] L.L. Beranek, *The transmission and radiation of acoustic waves by solid structures*, Noise Reduction, Chapter 13, New York: McGraw-Hill, 1960.
- [75] J.P. Den Hartog, *Vibracije u mašinstvu* (prijevod), "Gradjevinska knjiga", Beograd, 1972.
- [76] K.T. Sundara Raja Iyengar, R. Narayana Iyengar, *Determination of the orthotropic plate parameters of stiffened plates and grillages in free vibration*, Applied Scientific Research 17 (6) (1967) pp. 422-438.
- [77] E.J. Carlisle, R.J. Hooker, *Small chamber Reverberant absorption measurements*, Proceedings of ACOUSTICS 2004, Gold Coast, Australia, 3-5 November 2004.
- [78] C.E. Wallace, *Radiation Resistance of a Rectangular Panel*, Journal of the Acoustical Society of America, Volume 51, Number 3, Part 2, pp. 946, 1970.
- [79] P.J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration*, Academic Press, Inc. 1984.
- [80] Upute za računalni program ARTA (program for the impulse response measurement and for real-time spectrum analysis and frequency response measurements, autor: Dr. sc. Ivo Mateljan, Faculty of Electrical Engineering, R. Boškovića bb, 21000 Split, Hrvatska).
- [81] A. Skoblar, *Analiza zvučnog polja oko vibrirajuće ploče*, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, 2006.



## Popis oznaka i simbola

$a_D$	ukupna širina panela, m
$a_n$	koeficijent za određivanje vlastitih frekvencija
$\tilde{A}_l$	amplituda akustičkog tlaka upadnog vala, Pa
$A'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$A$	površina panela, $m^2$
$\mathbf{A}$	vektor amplituda prostornih harmonijskih valova, m
$A_a$	površina kroz koju akustički val prolazi, $m^2$
$A_g$	površina poprečnog presjeka grede, $m^2$
$A_i$	amplituda vibracija točke grede na položaju $x_i$ , m
$A_m$	amplituda m-tog prostornog harmonijskog vala, m
$A_{n-}$	amplituda n-tog prostornog harmonijskog vala koji putuje u negativnom smjeru, m
$A_n$	amplituda n-tog prostornog harmonijskog vala koji putuje u pozitivnom smjeru, m
$A_p$	površina poprečnog presjeka panela, $m^2$
$b_D$	ukupna visina panela, m
$\tilde{B}_l$	amplituda akustičkog tlaka reflektiranog vala, Pa
$B'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$\mathbf{B}$	matrica funkcija oblika,
$B_n$	amplituda potencijala brzine reflektiranog n-tog prostornog harmonijskog vala, $m^2/s$
$c_n$	fazna brzina n-tog prostornog harmonijskog vala, m/s
$\tilde{C}_1$	amplituda akustičkog tlaka pri radijaciji od vibrirajućeg panela u suprotnom smjeru od z-osi, Pa
$\tilde{C}_2$	amplituda akustičkog tlaka pri radijaciji od vibrirajućeg panela u smjeru z-osi, Pa
$C$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$C_{cn}$	bezdimenzijski parametar fazne brzine
$c_i$	brzina zvuka u i-tom materijalu, m/s
$C_i$	konstante
$C_n$	amplituda potencijala brzine n-tog prostornog harmonijskog vala na transmisijskoj strani, $m^2/s$
$C_t$	aksijalno prigušenje u ovjesu panela, Ns/m
$D'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$D$	fleksijska krutost grede, $Nm^2$
$d_{gnpp}$	indeks za donju graničnu frekvenciju n-tog propagacijskog pojasa
$E'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova

$E$	modul elastičnosti materijala, Pa
$E_{ekv}$	ekvivalentna vrijednost modula elastičnosti, Pa
$f$	frekvencija vibriranja, Hz
$\mathbf{f}$	vektor poprečnih sila i momenata savijanja u osloncu grede
$f(x)$	funkcija oblika
$F$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$F_i$	pomoćne funkcije po literaturi [63]
$\mathbf{f}_n$	vektor sile, N
$G'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$ggnpp$	indeks za gornju graničnu frekvenciju $n$ -tog propagacijskog pojasa
$h$	debljina panela, m
$H'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$H_n$	koeficijenti Fourierovog razvoja u red
$I$	aksijalni moment inercije poprečnog presjeka, $m^4$
$I'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$I_t$	transmisijski normalni intenzitet, $W/m^2$
$I_u$	udarni normalni intenzitet, $W/m^2$
$J'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$k$	broj vala, $m^{-1}$
$k_{CF}$	faktor korekcije
$k_x$	komponenta broja vala u smjeru $x$ -osi, $m^{-1}$
$k_{xn}$	komponenta broja vala $n$ -tog prostornog harmonijskog vala u smjeru $x$ -osi, $m^{-1}$
$k_z$	komponenta broja vala u smjeru $z$ -osi, $m^{-1}$
$k_{zn}$	komponenta broja vala $n$ -tog prostornog harmonijskog vala u smjeru $z$ -osi, $m^{-1}$
$K'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$K_r$	krutost fleksijske opruge u osloncu, Nm/rad
$K_t$	krutost poprečne opruge u osloncu, N/m
$K_{tekv}$	ekvivalentna aksijalna krutost poprečne opruge u osloncu, N/m
$L'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$L$	udaljenost između oslonaca po $x$ -osi, m
$L_{p,gluha}$	razina zvučnog tlaka u gluhoj komori, dB
$L_{p,ječna}$	razina zvučnog tlaka u ječnoj komori, dB
$L_y$	udaljenost između oslonaca po $y$ -osi, m
$m$	broj prostornog harmonijskog vala
$m_g$	specifična masa grede, kg/m
$m_M$	masa (bez volumena), kg
$m_p$	specifična masa panela, $kg/m^2$
$m_{UK}$	ukupna masa, kg
$M'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$M$	moment savijanja, Nm

$M_r$	moment savijanja u $r$ -tom osloncu, Nm
$\mathbf{M}_{VR}$	matrični prikaz jednadžbi virtualnih radova
$n$	broj prostornog harmonijskog vala
$n_f$	broj frekvencija izračuna
$n_p$	broj perioda grede konačnog panela
$n_T$	broj točaka izračuna po jednom periodu grede
$n_{UK}$	ukupan broj prostornih harmonijskih valova
$n_\Omega$	broj frekvencija u 1. propagacijskom pojasu
$N'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$O'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$p$	frekvencijska konstanta
$p_r^-$	akustičko polje radijacije u suprotnom smjeru od $z$ -osi, Pa
$p_r^+$	akustičko polje radijacije u smjeru $z$ -osi, Pa
$p_a$	akustički tlak, Pa
$p_r$	akustičko polje reflektiranog vala, Pa
$p_u$	akustičko polje udarnog vala, Pa
$p_\omega$	akustički tlak u dalnjem polju, Pa
$P'$	član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$\mathbf{P}$	vektor sa članom $P'$
$.._{Pris}$	indeks za prisilne vibracije grede
$q$	vanjska poprečna sila, N
$r$	polumjer polusfere do dalnjeg polja, m
$R$	indeks zvučne izolacije, izolacijska moć pregrade, prigušenje zvuka, dB
$R_{mn}$	radijacijski otpor, kg/s
$S$	poprečna sila, N
$S_a$	površina apsorpcijskog materijala, $m^2$
$.._{Slob}$	indeks za slobodne vibracije grede
$t$	vrijeme, s
$T$	vremenski period vala, s
$TL$	zvučni transmisijski gubitak, dB
$TL_{konv}$	zvučni transmisijski gubitak s konvergencijom vrijednosti, dB
$TL_{teor}$	teorijski zvučni transmisijski gubitak, dB
$\mathbf{u}$	vektor rubnih uvjeta,
$v$	brzina čestice medija u kojem se širi val, m/s
$\bar{v}$	usrednjena vibracijska brzina panela, m/s
$\tilde{v}$	amplituda brzine čestice medija u kojem se širi val, m/s
$V$	volumen panela, $m^3$
$w$	pomak u smjeru $z$ -osi Descartesovog koordinatnog sustava, m
$\tilde{w}$	amplituda pomaka u smjeru $z$ -osi Descartesovog koordinatnog sustava, m

$w_n(x)$	funkcija oblika n-tog prostornog harmonijskog vala
$\mathbf{w}$	vektor harmonijskih pomaka točke grede,
$x$	koordinata Descartesovog koordinatnog sustava, m
$z$	specifična akustična impedanca, Pas/m
$\tilde{z}_f$	specifična akustička impedanca u fluidu, Pas/m
$\tilde{z}_p$	specifična akustička impedanca u vakumu, Pas/m
$\mathbf{Z}$	matrica mehaničke impedance grede ili matrica dinamičke krutosti grede
$Z_0$	karakteristična ajustička impedanca, $\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$
$Z_a$	akustička impedanca, Pas/m <sup>3</sup>
$\alpha$	prijenosna funkcija poprečnog pomaka u jednoj točki zbog djelovanja sile u drugoj točki, $\text{mN}^{-1}$
$\alpha_a$	koeficijent apsorpcije materijala
$\beta$	prijenosna funkcija zakreta u jednoj točki zbog djelovanja momenta u drugoj točki, $\text{radN}^{-1}\text{m}^{-1}$
$\delta$	prijenosna funkcija poprečnog pomaka u jednoj točki zbog djelovanja momenta u drugoj točki, $\text{N}^{-1}$
$\delta A_m^*$	virtualna amplituda prostornog harmonijskog vala, m
$\delta_a$	koeficijent smanjenja amplitude
$\delta_D$	logaritamski dekrement
$\delta \mathbf{r}$	virtualni vektor pomaka, m
$\delta w$	virtualni poprečni pomak, m
$\delta W$	virtualni rad, J
$\delta w^*$	konjugirano kompleksni virtualni poprečni pomak, m
$\delta \Pi_M$	virtualni rad točkaste mase u osloncu, J
$\delta \Pi_p$	virtualni rad unutarnjih sila jednog perioda grede, J
$\delta \Pi_t$	virtualni rad poprečne opruge u osloncu, J
$\delta \Pi_l$	virtualni rad poprečne opruge u osloncu, J
$\Delta f$	frekvencijski pojas između susjednih frekvencija izračuna, Hz
$\Delta L_p$	koeficijent redukcije buke, dB
$\varepsilon$	deformacija
$\varepsilon_y$	deformacija po y-osi kod ravninskog stanja defomacije
$\gamma$	prijenosna funkcija zakreta u jednoj točki zbog djelovanja sile u drugoj točki, $\text{radN}^{-1}$
$\eta$	faktor prigušenja u materijalu grede
$\eta_r$	faktor prigušenja u fleksijskoj opruzi u osloncu
$\eta_t$	faktor prigušenja u poprečnoj opruzi u osloncu
$\eta_v$	koeficijent gubitaka u vakuumu

---

$\varphi_g$	fazni kutevi po duljini grede za ukupni val, rad
$\varphi_{ng}$	fazni kutevi po duljini grede za n-ti prostorni harmonijski val, rad
$\Phi_1$	potencijal brzina upadnog i reflektiranog vala, $m^2/s$
$\Phi_2$	potencijal brzina transmitiranog vala, $m^2/s$
$\kappa$	bezdimenzijska krutost fleksijske opruge
$\lambda$	valna duljina, m
$\lambda_t$	valna duljina trace vala, m
$\mu$	propagacijska konstanta
$\mu_i$	imaginarna komponenta propagacijske konstante
$\mu_p$	faktor brojnosti normalnih oblika vibriranja
$\mu_r$	realna komponenta propagacijske konstante
$\nu$	Poissonov koeficijent
$\theta$	zakret elementa grede, rad
$\Omega$	bezdimenzijski parametar frekvencije
$\Pi$	akustička snaga radijacije, W
$\rho$	gustoća materijala, $kg/m^3$
$\rho_0$	gustoća zraka, $kg/m^3$
$\sigma$	naprezanje, Pa
$\sigma_{ef}$	efikasnost radijacije konačnog panela
$\sigma_x$	naprezanje po x-osi kod ravninsnkog stanja naprezanja, Pa
$\bar{\tau}$	usrednjeni koeficijent transmisije zvučne snage,
$\tau_b$	koeficijent transmisije zvučne snage beskonačne grede za jedan upadni kut $\vartheta$ ,
$\tau_k$	koeficijent transmisije zvučne snage konačne grede za jedan upadni kut $\vartheta$ ,
$\vartheta$	upadni kut udarnog zvuka, rad
$\vartheta_{lim}$	granični upadni kut iznad kojeg se ne očekuje udarni zvuk, rad
$\omega$	kružna frekvencija vibriranja, $s^{-1}$
$\omega_1$	prva vlastita kružna frekvencija vibriranja, $s^{-1}$
$\psi$	koeficijent faznog prigušenja, $m^{-1}$
$\zeta$	omjer prigušenja



## Popis slika

Slika 2.1 Diferencijalni element grede s odgovarajućim silama i momentima .....	12
Slika 2.2 Beskonačna greda periodički oslonjena na jednostavne oslonce .....	16
Slika 2.3 Pozitivni pomaci i zakreti perioda grede .....	16
Slika 2.4 Momenti koji djeluju na period grede .....	17
Slika 2.5 Oblici vibriranja: a) na niskoj frekvenciji u prvom stojnom frekventnom pojasu, b) na donjoj graničnoj frekvenciji i c) gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog frekventnog pojasa .....	21
Slika 2.6 Vrijednosti kompleksnih propagacijskih konstanti (imaginarni dio _____ i realni dio ----- ) u funkciji o bezdimenzijskom frekvencijskom parametru $\Omega$ .....	22
Slika 2.7 Sekundarne vrijednosti imaginarnе propagacijske konstante za 1. propagacijski frekvencijski pojas .....	23
Slika 2.8. Beskonačna greda na jednakom udaljenim elastičnim osloncima .....	29
Slika 2.9. Dva susjedna perioda grede s poprečnim pomacima i zakretima u osloncima .....	29
Slika 2.10 Prikaz prostornih harmonijskih valova na beskonačnoj periodički oslonjenoj gredi .....	31
Slika 2.11 Beskonačna periodički oslonjena greda na jednostavnim osloncima .....	31
Slika 2.12 Beskonačna greda periodički oslonjena na jednostavne oslonce .....	39
Slika 2.13 Prikaz vektora pomaka $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ u susjednim periodima grede .....	39
Slika 2.14 Vrijednosti faznih brzina komponenta pozitivno usmjerjenog vala u prvom propagacijskom frekvencijskom pojusu .....	43
Slika 2.15 Realne i imaginarnе vrijednosti propagacijskih konstanti (metoda propagirajućih valova) .....	44
Slika 2.16 Vrijednosti primarne imaginarnе _____ i realne ..... komponente propagacijske konstante u funkciji parametra frekvencije .....	44
Slika 2.17 Omjer amplituda slobodne grupe prostornih harmonijskih valova ( $\Omega=15.5$ ) .....	45
Slika 2.18 Oblik vibriranja pri $\Omega=15.5$ : realni oblik vibriranja _____ i imaginarna komponenta ----- .....	46
Slika 2.19 Amplitude i fazne brzine prostornih harmonijskih valova u zadanim frekvencijskom pojusu .....	47

Slika 2.20 <i>Omjer amplituda prostornih harmonijskih valova slobodne valne grupe (<math>\Omega=50,2</math>)</i> .....	48
Slika 2.21 <i>Oblik vibriranja na <math>\Omega=50,2</math></i> .....	48
Slika 2.22 Fazna brzina slobodnih valova u neoslonjenoj gredi ----- i u periodički oslonjenoj gredi _____ (horizontalne linije predstavljaju faznu brzinu prisile $C_{cn1}=0,8$ i $C_{cn2}=2$ ).....	49
Slika 2.23 <i>Idealizirani model normalne transmisije zvuka kroz jednostruki panel</i> .....	52
Slika 2.24 <i>Beskonačna greda na jednako udaljenim elastičnim osloncima s harmonijskom prisilom u jednoj točki</i> .....	55
Slika 2.25 <i>Prostorni prikaz panela oslonjenog u jednom smjeru pod utjecajem ravninskog akustičkog vala sa upadnim kutem <math>\theta</math></i> .....	56
Slika 2.26 <i>Definicija valne duljine "trace" vala pri zadanom upadnom kutu <math>\vartheta</math></i> .....	56
Slika 2.27 <i>Geometrijske karakteristike beskonačne periodički oslonjene grede</i> .....	58
Slika 2.28 <i>Nagib tangente na elastičnu liniju grede ----- (<math>\theta</math>, rad) i oblik prisilnog vibriranja grede _____ (w, m)</i> .....	59
Slika 2.29 <i>Konvergencija rezultata zvučnih transmisijskih gubitaka TL</i> .....	63
Slika 2.30 <i>Shematski prikaz metode prostornog isječka</i> .....	65
Slika 2.31 <i>Pravokutni panel u beskonačnoj ravnini</i> .....	67
Slika 2.32 <i>Efikasnost radijacije konačnog periodički oslonjenog panela</i> .....	68
Slika 3.1 <i>Dijagram toka numeričkog modela</i> .....	70
Slika 3.2 <i>Utjecaj prigušenja u panelu <math>\eta</math> na potreban broj prostornih harmonijskih valova (<math>n_{Ref}*2+1</math>) za periodički oslonjen panel: <math>\eta=0</math> -----, <math>\eta=0,1</math> -----, <math>\eta=0,2</math> -.-.- i <math>\eta=0,4</math> -----</i> .....	74
Slika 3.3 <i>Primjer odstupanja vrijednosti propagacijske konstante kod upotrebe nedovoljnog broja prostornih harmonijskih valova, propagacijska konstanta po izrazu(2.48) ..... i pomoću prostornih harmonijskih valova (<math>\mu_r</math> -.-.-. i <math>\mu_i</math> _____)</i> .....	75
Slika 3.4 <i>Usporedba zvučnih transmisijskih gubitaka TL-a za beskonačni periodički oslonjen panel ----- i neoslonjen panel -----</i> .....	76
Slika 3.5 <i>Utjecaj upadnog kuta <math>\vartheta</math> na TL za periodički oslonjen panel: <math>\vartheta_1=15^\circ</math> -----, <math>\vartheta_2=45^\circ</math> ----- i <math>\vartheta_3=70^\circ</math> .....</i>	77
Slika 3.6 Utjecaj koeficijenta faznog prigušenja $\psi$ na TL za periodički oslonjen panel: $\psi_1=0^\circ$ , $\psi_2=1^\circ$ ----- i $\psi_3=10^\circ$ .....	77
Slika 3.7 <i>Utjecaj prigušenja u panelu <math>\eta</math> na TL za periodički oslonjen panel: <math>\eta_1=0</math> -----, <math>\eta_2=0,1</math> ----- i <math>\eta_3=0,2</math> -.-.-. i TL za neoslonjeni panel</i> .....	78
Slika 3.8 <i>Utjecaj krutosti poprečne opruge u osloncu <math>K_t</math> na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: <math>K_{t1}=3,6 \cdot 10^9</math> -----, <math>K_{t2}=3,6 \cdot 10^7</math> -----, <math>K_{t3}=3,6 \cdot 10^5</math> -.-.-. i <math>K_{t4}=0</math> -----</i> .....	78

Slika 3.9 Utjecaj prigušenja poprečne opruge u osloncu $\eta_t$ na TL za periodički oslonjen panel uz dozvoljene poprečne pomake tj. $K_t=3,6 \cdot 10^6$ : $\eta_{t1}=0$ ———, $\eta_{t2}=0,1$ -----, $\eta_{t3}=0,2$ -.-.-.- i TL za neoslonjeni panel .....	79
Slika 3.10 Utjecaj krutosti fleksijske opruge u osloncu $K_r$ na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: $K_{r1}=0$ ———, $K_{r2}=10^3$ -----, $K_{r3}=10^6$ -.-.-.- i $K_{r4}=10^9$ ..... (krivulje $TL_{kr3}$ i $TL_{kr4}$ se preklapaju) .....	80
Slika 3.11 Utjecaj prigušenja fleksijske opruge u osloncu $\eta_r$ na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela uz dozvoljene poprečne pomake tj. $K_t=3,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ : $\eta_{r1}=0$ ———, $\eta_{r2}=0,1$ -----, $\eta_{r3}=0,2$ -.-.-.- i TL za neoslonjeni panel .....	80
Slika 3.12 Utjecaj mase pomičnog dijela oslonca $M$ na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela uz dozvoljene poprečne pomake tj. $K_t=3,6 \cdot 10^6$ : $m_{M1}=0 \text{ kg}$ ———, $m_{M2}=0,1 \text{ kg}$ -----, $m_{M3}=0,2 \text{ kg}$ .....	81
Masa pomičnog dijela oslonca ima pozitivan utjecaj na TL kad je omogućeno poprečno gibanje oslonaca (slika 3.12). Očito je da ona povoljno djeluje na odziv jer s njenim rastom raste ukupna masa pregrade što je uvijek povoljno za TL.....	81
Slika 3.13 Utjecaj materijala panela na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: čelik ( $\rho=7750 \text{ kg/m}^3$ , $E=1,9 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ , $\nu=0,3$ ) ———, aluminij ( $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$ , $E=0,71 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ , $\nu=0,33$ ) -----, bronca ( $\rho=8500 \text{ kg/m}^3$ , $E=1,04 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ , $\nu=0,37$ ) .....	81
Slika 3.14 Utjecaj debljine panela $h$ na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: $h_1=1 \text{ mm}$ ———, $h_2=1,14 \text{ mm}$ -----, $h_3=1,27 \text{ mm}$ .....	82
Slika 3.15 Utjecaj udaljenosti između oslonaca $L$ na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: $L_1=100 \text{ mm}$ ———, $L_2=150 \text{ mm}$ -----, $L_3=200 \text{ mm}$ .....	83
Slika 3.16 Usporedba brzine određivanja amplitude prostornih harmonijskih valova pri zadanoj frekvenciji neprigušenih slobodnih vibracija pomoću metode virtualnog rada ——— i Fourierovog razvoja u red ----- .....	84
Slika 3.17 Krivulja ovisnosti vrijednosti hiperbolnog kosinusa propagacijske konstante $cosh(\mu)$ o parametru frekvencije $\Omega$ .....	86
Slika 3.18 Izgled realne ——— i imaginarne ----- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede (desno) po novoj funkciji oblika (2.44) .....	87
Slika 3.19 Izgled realne ——— i imaginarne ----- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede (desno) po funkciji oblika (2.45) [33] .....	87
Slika 3.20 Izgled realne ——— i imaginarne ----- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede po metodi virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova (desno) .....	88
Slika 3.21 Slobodne vibracije panela definirane s grupom prostornih harmonijskih valova	89
Slika 3.22 Akustički odziv panela na razne upadne kuteve: a) $\vartheta=5^\circ$ , b) $\vartheta=25^\circ$ , c) $\vartheta=45^\circ$ i d) $\vartheta=65^\circ$ definiran s grupom prostornih harmonijskih valova .....	89

Slika 3.23. Model konačnih elemenata akustičkog odziva konačnog periodički oslonjenog panela.....	91
Slika 3.24 Rezultati zvučnih transmisijskih gubitaka: a) metoda virtualnog rada $\theta_{lim} = 72^\circ$ -.-.---, b) metoda virtualnog rada i metoda prostornog isječka -----, metoda konačnih elemenata, Actran c) 3D difuzno polje ..... i d) 2D difuzno polje _____. .....	91
Slika 4.1 Tlocrt eksperimentalnog modela za mjerjenje koeficijenta transmisije zvučne snage TL, dB.....	94
Slika 4.2 Dimenzije i oblik stijenki ječne komore .....	94
Slika 4.3 Izgled ječne komore .....	95
Slika 4.4 Slojevi kamene vune u gluhoj komori .....	96
Slika 4.5 Izgled zatvorenog prozora (lijevo: pogled sa strane ječne komore, desno: pogled sa strane gluhe komore) .....	96
Slika 4.6 Dupla vrata između gluhe komore i prostora oko ječne komore.....	97
Slika 4.7 Okvir za vanjski rub panela .....	97
Slika 4.8 Periodički okvir za panel .....	98
Slika 4.9 Mjerna oprema (mjerna kartica, mikrofon i omnodirekcijski zvučnik redom) .....	98
Slika 4.10 Mjerjenje impulsnog odziva .....	99
Slika 4.11 Provjera frekvencije 1. oblika vibriranja .....	100
Slika 4.12 Prikaz referentnog oblika vibriranja na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog pojasa .....	101
Slika 4.13 Oblik vibriranja na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog pojasa izračunat pomoću računalnog modela u Matlab-u .....	101
Slika 4.14. Vremenski odziv trake od mesinga.....	102
Slika 4.15 Prikaz mjerjenja prigušenja u brtvi .....	103
Slika 4.16 Mjerjenje prigušenja u brtvi .....	103
Slika 4.17 Kidalica, Laboratorij za čvrstoću Tehničkog fakulteta Rijeka .....	105
Slika 4.18 Dijagram $\sigma(\epsilon)$ za brtvu, mjereno na kidalici na slici 4.17 .....	105
Slika 4.19 Dva periodična okvira na konstantnoj udaljenosti s ciljem definiranja krutosti poprečne opruge u osloncima .....	106
Slika 4.20 Panel između dvije brtve .....	106
Slika 4.21 Izmjerene veličine razine buke u ječnoj komori ( - - - - ), gluhoj komori (.....) i izračunati zvučni transmisijski gubitak ( ____ ) .....	109
Slika 4.22 Rezultati zvučnih transmisijskih gubitaka: a) metoda virtualnog rada $\theta_{lim} = 72^\circ$ ..... , b) metoda virtualnog rada i metoda prostornog isječka -----, i c) eksperimentalni rezultati _____. .....	109

**Popis tablica**

Tablica 3.1 <i>Vrijeme u sekundama potrebno za izračun amplituda prostornih harmonijskih valova sa slike 3.16.....</i>	90
Tablica 4.1 <i>Vrijednosti korekcijskog faktora.....</i>	110



## Životopis

Ante Skoblar je rođen 26. studenoga 1973. godine u Rijeci, Republika Hrvatska. U Rijeci pohađa osnovnu školu nakon koje upisuje srednju školu Centar za kadrove u obrazovanju i kulturi, Rijeka, i to prirodoslovno-matematičku struku, matematičko-informatičkog obrazovnog profila. Srednju školu završava u lipnju 1992. godine, i iste godine upisuje studij strojarstva na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci kojeg završava 1998. obranom diplomskog rada naslova Buka i vibracije elektromotora pod vodstvom mentora red. prof. dr. sc. Mirka Butkovića, dipl. ing. i time stiče zvanje diplomiranog inženjera strojarstva.

U siječnju 1999. godine zapošljava se u poduzeću "Riječki akustički inženjeri" gdje obavlja poslove vezane uz tehnologiju proizvodnje raznih zvuko, toplinsko i vibroizolacijskih proizvoda, uglavnom vezanih uz brodogradnju. Tijekom 2000. odslužio je vojni rok te se zapošljava u Brodogradilištu 3. Maj kao projektant u uredu strojnih uređaja za klasu gdje radi na projektiranju različitih brodskih sustava.

U prosincu 2001. godine zapošljava se na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci kao znanstveni novak na Zavodu za tehničku mehaniku gdje drži nastavu iz predmeta Kinematika, Dinamika, Vibracije i Mehanika II, a isto tako sudjeluje na znanstvenom projektu "Mehanička sigurnost strojeva", br. 069013 te znanstvenom projektu "Nelinearna dinamika rotacijskih strojeva", br. 0069016 pod vodstvom glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Mirka Butkovića. Istovremeno upisuje i poslijediplomski studij strojarstva, smjer Računarska mehanika. U rujnu 2004. boravi mjesec dana u Laboratoriju za mehatroniku tehničkog sveučilišta u Darmstadtu (Njemačka) pod vodstvom prof.dr.ing. R. Nordmanna.

U svibnju 2006. uspješno je obranio magistarski rad pod imenom Analiza zvučnog polja oko vibrirajuće ploče.

Od 2007. sudjeluje u znanstvenom projektu "Redukcija vibracija i buke mehatroničkim pristupom", br. 069-0691736-1733 pod vodstvom glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Roberta Žigulića.

Autor je ili koautor 30 znanstvenih radova objavljenih u domaćim ili stranim časopisima ili zbornicima radova. Član je Hrvatskog društva za mehaniku (HDM), Hrvatskog društva za teoriju strojeva i mehanizama (CroFToMM) i Hrvatskog akustičkog društva (HAD).

Oženjen je i otac dvije kćeri.

## **PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI**

### **1. AUTOR**

Ime i prezime:	Ante Skoblar
Datum i mjesto rođenja:	26. studenog 1973., Rijeka
Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, strojarstvo, 1998.
Naziv fakulteta, smjera i godina završetka poslijediplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, računarska mehanika, 2006.
Sadašnje zaposlenje:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### **2. DOKTORSKA DISERTACIJA**

Naslov:	Analiza akustičkog odziva pravokutne ploče
Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka:	
Znanstveno polje i grana:	Strojarstvo, opće strojarstvo (konstrukcije); Druge temeljne tehničke znanosti, tehnička mehanika
Voditelj rada:	red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing.
Fakultet na kojem je rad obranjen:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### **3. OBRANA I OCJENA**

Datum prijave teme:	
Datum predaje rada:	
Datum prihvaćanja ocjene rada:	
Sastav Povjerenstva za ocjenu:	izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing. red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing. red. prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing.
Datum obrane:	
Sastav Povjerenstva za obranu:	izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing. red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing. red. prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing.
Datum promocije:	

Oznaka: D.D

UDK: